MATEMÁTICA ESPECIAL PARA LA FÍSICA
1er. cuatrimestre 2011

SERIE I

TRANSFORMACIONES INTEGRALES

Problema 1:

Resuelva el problema de Cauchy para la ecuación de ondas

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad -\infty < x < \infty,\ t > 0$$

con condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = g(x)$$

usando la transformada de Fourier. Obtenga la solución de D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi .$$

Problema 2:

Usando la transformada de Fourier bidimensional, obtenga la solución de la ecuación de Helmholtz modificada

$$u_{xx} + u_{yy} - k^2 u = f(x, y) \qquad -\infty < x, y < \infty$$

($k > 0$, $f(x, y)$ es dato). Halle una solución tal que $u(x, y) \to 0$ cuando $|x|,\ |y| \to \infty$.

Problema 3:

Sea el problema de Cauchy para la ecuación de ondas tridimensional

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \qquad -\infty < x, y, z < \infty,\ t > 0$$

con condiciones iniciales

$$u(\underline{\mathbf{x}}, 0) = 0, \quad u_t(\underline{\mathbf{x}}, 0) = f(\underline{\mathbf{x}})$$

a) Halle la solución del problema.

b) Empleando el método de descenso de Hadamard, encuentre la solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas en dos dimensiones.

Problema 4:

Sea el problema de Cauchy para la ecuación de Klein Gordon

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + a^2 u = 0 \qquad -\infty < x < \infty , t > 0$$

con condiciones iniciales

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = f(x)$$

a) Dada $v(x, y, t) = \cos(ay/c)\, u(x, t)$, muestre que $v(x, y, t)$ satisface a la ecuación de ondas en dos dimensiones.
b) Emplee este resultado para resolver el problema de Klein-Gordon propuesto más arriba.

Problema 5:

Considere el problema de la ecuación de ondas bidimensional con simetría radial

$$u_{tt} - c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) = 0 \qquad r > 0 , t > 0$$

con condiciones iniciales $u(r, 0) = f(r)$ y $u_t(x, 0) = g(r)$.

Obtenga la solución de este problema usando la transformada Hankel de orden 0.

Problema 6:

Use la transformada de Laplace para resolver el siguiente problema de Cauchy

$$u_t - c^2 u_{xx} = 0, \qquad -\infty < x < +\infty , t > 0$$

con la condición inicial $u(x, 0) = \delta(x - a)$.

Problema 7:

Resuelva el problema de Cauchy de la ecuación del telégrafo usando la transformada de Laplace

$$u_{tt} - \gamma^2 u_{xx} + 2\lambda u_t = 0 \qquad -\infty < x < +\infty , t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, u_t (x, 0) = g(x)$$

Sugerencia: Sustituya $u(x, t) = e^{-\lambda t} v(x, t)$ para eliminar el término de derivada primera temporal. Use el hecho de que la transformada de Laplace de $I_o\left(a\sqrt{t^2 - b^2}\right)H(t-b)$ es igual a

$$\left(p^2 - a^2\right)^{-1/2} \exp\left(-b\sqrt{p^2 - a^2}\right)$$

donde I_0 es la función de Bessel modificada de orden 0 y $H(z)$ es la función de Heaviside (función escalón).