MATEMÁTICA ESPECIAL PARA LA FÍSICA
2do cuatrimestre 2008
SERIE II
CÁLCULOS ASINTÓTICOS DE INTEGRALES

Problema 1: Se define la función de Bessel de orden n como

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ixsen\theta - in\theta} d\theta.$$

Mostrar usando el método de la fase estacionaria que

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \qquad x \to \infty.$$

Sugerencia: observar que hay dos puntos de fase estacionaria.

Problema 2: La ecuación de Airy $y'' - xy = 0$ tiene como solución la función de Airy definida por

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} cos\left(\frac{\tau^3}{3} + x\tau\right) d\tau.$$

Sea $x < 0$ y $\tau = t\sqrt{-x}$. Usar el método de la fase estacionaria para mostrar que

$$Ai(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} sen\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \qquad x \to -\infty.$$

Problema 3: Usar la transformada de Fourier para hallar la solución del problema de Cauchy para la ecuación

$$u_t + a^2 u_x + b^2 u_{xxx} = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x).$$

Analizar la solución para x, t grandes empleando el método de la fase estacionaria.

Problema 4: Encontrar el comportamiento asintótico de la ecuación de ondas disipativa

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + u_t - \alpha u_x = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

donde α y c son constantes positiva, $\alpha < c$, con condiciones iniciales $u(x,0)$ y $u_t(x,0)$ dadas. ¿Qué sucede si $\alpha > c$?

Problema 5: Aplicar el método de fase estacionaria a la integral

$$I(k) = \int_a^b f(t) e^{ik\varphi(t)} dt$$

(f, φ reales, $k >> 1$) si $\varphi'(t_0) = \varphi''(t_0) = 0$.

Problema 6: Calcular por el método de descensos rápidos la aproximación para $|z| >> 1$ de la función gamma

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt$$

fuera del semieje $\Im m\{z\} = 0$, $\Re e\{z\} < 0$.
(Nota: para n natural, $\Gamma(n+1) = n!$).

Problema 7: Emplear el método de descensos rápidos para estimar la integral

$$J_0(x) = \Re e \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-i\pi/2}^{i\pi/2} e^{ix\, cosh\, t} dt \right\}$$

para $x >> 1$.