MATEMÁTICA ESPECIAL PARA LA FÍSICA
2do. cuatrimestre 2008

SERIE III

ECUACIONES A DERIVADAS PARCIALES DE 2DO. ORDEN CLASIFICACIÓN, ESTABILIDAD DE SOLUCIONES ECUACIONES NO LINEALES

Problema 1: Clasifique las siguientes ecuaciones, halle las características y llévelas a la forma canónica.

a) $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + 3u_x - u_y + 2u = 0$

b) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 5u_x + 3u_y + u = 0$

c) $u_{xx} - 6u_{xy} + 12u_{yy} + 4u_x - u = 0$

A continuación, introduzca la transformación

$u(\zeta, \eta) = \exp(\alpha\zeta + \beta\eta)v(\zeta, \eta)$

y elija las constantes α y β de modo de eliminar los términos en derivadas primeras en la forma canónica resultante.

Problema 2: Halle las regiones en que la ecuación de Tricomi

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0$$

es de tipo elíptico, hiperbólico y parabólico. Obtenga las características y la forma canónica en la región donde la ecuación es de tipo hiperbólico.

Problema 3: Muestre que la ecuación

$$u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$$

tiene la forma canónica $u_{\zeta\eta} = 0$ en la región en que es de tipo hiperbólico. Use este resultado para mostrar que en esa región tiene una solución general de la forma

$$u(x, y) = f(x + 2\sqrt{-y}) + g(x - 2\sqrt{-y})$$

donde f y g son funciones arbitrarias.

Problema 4: Use la solución

$$u(x,t) = \frac{1}{n} e^{\rho n^2 t} sen(nx)$$

de la ecuación del calor

$$\rho u_{xx} + u_t = 0, \qquad \rho > 0$$

para demostrar que el problema con condiciones de contorno $u(x=0,t) = u(x=\pi,t)$ y la condición inicial $u(x,t=0)$ está mal planteado.

Problema 5: Para el operador diferencial a derivadas parciales de segundo orden:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = 0$$

$A...F$ constantes, mostrar que si el índice de estabilidad Ω es $+\infty$ entonces el problema de condiciones iniciales $u(x,0)$, $u_t(x,0)$ es un problema mal planteado.

Problema 6: Considere la ecuación hiperbólica

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + u_t - \alpha u_x = 0.$$

A partir de $u(x,t) = A(k)\exp(ikx + \lambda(k)t)$ y examinando el comportamiento de $\lambda(k)$, demuestre que es inestable si $c^2 < \alpha^2$. (Sugerencia: considere valores pequeños de k).

Problema 7: Muestre que el índice de estabilidad Ω para la ecuación hiperbólica

$$u_{tt} - \gamma^2 u_{xx} - c^2 u = 0, \qquad c > 0$$

está dado por $\Omega = c$. Por lo tanto, si bien el problema de Cauchy está bien planteado, la ecuación es inestable.

Problema 8: Considere la ecuación hiperbólica no lineal

$$u_{tt} - u_{xx} = \gamma u(1 - u^2), \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

a) Muestre que si la ecuación se linealiza para pequeños valores de u y se supone $\gamma > 0$, existen soluciones exponencialmente crecientes.
b) Considere $u = 1 + \epsilon v$, obtenga una ecuación linealizada para v de la forma de la ecuación de Klein–Gordon si $\gamma > 0$, y muestre que es neutralmente estable.

Problema 9: Considere el problema de condiciones iniciales y de contorno para la ecuación hiperbólica no lineal

$$u_{tt} - u_{xx} = \gamma u(1 - u^2), \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

$$u(x,0) = \epsilon h(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

Use un análisis de estabilidad alrededor de la solución $u_0 = 0$ para determinar un valor crítico γ_c tal que existan soluciones de modos normales exponencialmente crecientes si $\gamma > \gamma_c$. Usando un desarrollo en autofunciones discuta el comportamiento de la solución si γ es ligeramente mayor que γ_c.