MATEMÁTICA ESPECIAL PARA LA FÍSICA
1^{er} cuatrimestre 2011
SERIE VII
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS APROXIMACIONES ASINTÓTICAS

Problema 1: punto singular regular

Encontrar una solución en la forma de serie de Frobenius para la ecuación de Bessel modificada

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

que tiene un punto singular regular en $x = 0$.

Problema 2: punto singular irregular

Dada la ecuación

$$x^3 y'' = y,$$

(a) calcular el término principal de la aproximación asintótica cuando $x \to 0^+$, para la solución cuyo factor de control es $e^{-2/\sqrt{x}}$.

(b) hallar una relación de recurrencia para los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de $\sqrt{x}$ para las correcciones al comportamiento principal cerca del origen.

Problema 3:

Dada la ecuación

$$y'' = -Q(x)y,$$

con un punto singular irregular en $x = x_0$, y tal que $|(x - x_0)^2 Q(x)| \to \infty$ para $x \to x_0$, mostrar que el comportamiento principal está dado por

$$y(x) \sim c[Q(x)]^{-1/4} \exp\left\{\pm i \int [Q(t)]^{1/2} dt\right\}, \qquad x \to x_0.$$

Problema 4:

Aplicar la propiedad anterior al caso

$$y'' = -y/x^5, \qquad x \to 0^+.$$

Problema 5:

Hallar la aproximación asintótica de las soluciones de la ecuación de Airy

$$y'' = xy$$

para $x \to +\infty$.

Problema 6:

Probar que si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge para $|x - x_0| < R$ a la función $f(x)$, entonces la serie es también asintótica a $f(x)$ cuando $x \to x_0$:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \qquad x \to x_0,$$

de manera que las series asintóticas son generalizaciones de las series de Taylor. Ayuda: usar la regla de l'Hôpital para el límite que corresponde al coeficiente a_{N+1}.

Problema 7: Ecuación de modificada de Bessel

Dada la ecuación modificada de Bessel:

$$x^2\; y'' + x\; y' + (\nu^2 + x^2)\; y = 0$$

a) Mostrar que tiene un punto singular irregular en $x \to \infty$.

b) Mostrar que el comportamiento principal de las soluciones es de la forma:

$$y \sim \alpha_{\pm}\; x^{-1/2}\; e^{\pm ix},\; x \to \infty$$