

## FÍSICA TEÓRICA 1

Ecuaciones de Maxwell (CGS Gaussiano) en vacío:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 4\pi\rho \quad (\text{Ley de Gauss})$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Faraday})$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \quad (\text{Inexistencia de monopolos})$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Ampère generalizada})$$

↑ corriente de desplazamiento  
(necesaria para conservar la carga)

Tomando  $\frac{\partial}{\partial t}$  de la ley de Gauss

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \underline{\nabla} \cdot \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \underline{\nabla} \cdot \left( \underline{\nabla} \times \underline{B} - \frac{4\pi}{c} \underline{J} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{J} = 0 \quad (\text{Ec. de continuidad})$$

### Campos de gradientes y rotors

Dado un campo vectorial  $\underline{w}(\underline{x})$ , se puede descomponer univocamente\* como

$$\underline{w} = \underline{v} + \underline{u}$$

$$\text{tp } \underline{\nabla} \times \underline{v} = 0 \quad (\text{irrotacional}) \quad \text{y} \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \quad (\text{solenoidal})$$

Dem: Como  $\nabla \times \underline{V} = 0 \Rightarrow \exists \varphi / \nabla \varphi = \underline{V}$

Tomando la divergencia

$$\nabla \cdot \underline{W} = \nabla^2 \varphi \quad (\text{Ec. de Poisson})$$

La ec. tiene solución

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \underline{W}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3 \underline{r}'$$

y luego  $\underline{V} = \nabla \varphi$ .

Luego  $\underline{U} = \underline{W} - \underline{V} = \underline{W} - \nabla \varphi$

Veamos que es solenoidal

$$\nabla \cdot \underline{U} = \nabla \cdot \underline{W} - \nabla^2 \varphi = \nabla^2 \varphi - \nabla^2 \varphi = 0$$

Además, como  $\nabla \cdot \underline{U} = 0 \Rightarrow \exists \underline{A} / \underline{U} = \nabla \times \underline{A}$

y  $\underline{W} = \nabla \times \underline{A} + \nabla \varphi$

(\* esta descomposición final es única salvo por un gradiente en la determinación de  $\underline{A}$ ).

Para determinar  $\underline{A}$  tomamos

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{W} &= \nabla \times \nabla \times \underline{A} + \nabla \times (\nabla \varphi) = \\ &= \nabla(\nabla \cdot \underline{A}) - \nabla^2 \underline{A} \end{aligned} \quad (1)$$

Podemos pedir  $\nabla \cdot \underline{A} = 0$

$$\Rightarrow \nabla \times \underline{W} = -\nabla^2 \underline{A}$$

El laplaciano de un vector está definido como

$$(\nabla \times \underline{W})_i = -\nabla^2 A_i \quad i = 1, 2, 3$$

i.e., el laplaciano de cada componente.

$$\Rightarrow \underline{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \underline{W}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3 \underline{r}'$$

### Notación de índices

Representamos las componentes de vectores y tensores por subíndices, y utilizamos convención de la suma para índices repetidos. Antes, definamos dos tensores útiles

Tensor de Kronecker: Es un tensor de rango 2  $\underline{t}_p$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Tensor de Levi-Civita: Es un pseudo-tensor de rango 3  $\underline{t}_p$  sus componentes son

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i,j,k \text{ es permutación par de } x,y,z \\ -1 & \text{si } i,j,k \text{ es permutación impar de } x,y,z \\ 0 & \text{si se repite algún índice} \end{cases}$$

Luego podemos escribir

$$(\underline{A} \times \underline{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

$$\underline{E}_j: (\underline{A} \times \underline{B})_1 = \varepsilon_{1jk} A_j B_k = A_2 B_3 - A_3 B_2$$

Si  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$  son vectores  $\Rightarrow \underline{A} \times \underline{B}$  es un pseudovector.

Usemos esto para probar (1):

$$\begin{aligned}
[\nabla \times (\nabla \times \underline{A})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\nabla \times \underline{A})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} \partial_l A_m) = \\
&= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m = \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m = \\
&= \partial_i \partial_j A_j - \partial_j \partial_j A_i
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla (\nabla \cdot \underline{A}) - \nabla^2 \underline{A}$$

Electrostática :

La fuerza que siente una carga  $q_1$  en  $\underline{r}_1$  debido a una carga  $q_2$  en  $\underline{r}_2$  es

$$\underline{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} \underline{r}_1 - \underline{r}_2 \quad \begin{array}{l} \text{(Ley de Coulomb)} \\ (k=1 \text{ en CGS-gaussiano}) \end{array}$$

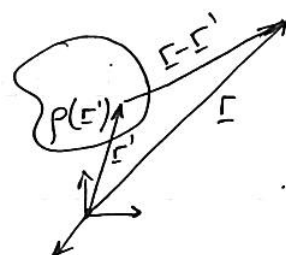
Notar que  $\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$  y la fza. está dirigida a lo largo de la recta que une las dos cargas (satisface el ppio. de acción fuerte).

El campo eléctrico en un pto.  $\underline{r}$  se define como

$$\underline{E}(\underline{r}) = \lim_{\delta q \rightarrow 0} \frac{\underline{F}(\delta q(\underline{r}))}{\delta q(\underline{r})} \quad \text{con } \delta q \text{ carga de prueba}$$

luego, dada una distribución de carga  $\rho(\underline{r}')$  el campo en  $\underline{r}$  es

$$d\underline{E}(\underline{r}) = \rho(\underline{r}') \frac{(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} d\underline{r}'$$



$$\gamma \quad \boxed{E(\underline{r}) = \int \frac{\rho(\underline{r}') (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} d^3 \underline{r}'}$$

ppio. de superposición  
con Coulomb pto. a  
pto.

$$\text{tp. } E = qE$$

En muchos casos, la distribución de carga no está dada en volumen (ej: densidad de carga en superficie, cargas puntuales, etc.)

### Distribuciones

Dada una sucesión de funciones  $\{f_n(x)\} \in L^2(-\infty, \infty)$

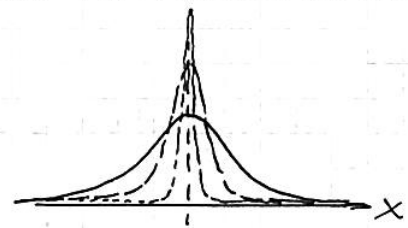
$$\text{tp } \forall \rho(x) \in L^2(-\infty, \infty)$$

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \rho(x) dx \quad \text{es finita}$$

Puede ocurrir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \notin L^2(-\infty, \infty)$

Ejemplo:  $\{f_n(x)\} = N_n e^{-nx^2}$  con  $N_n$  normalización

$$\text{i.e. } \text{tp } \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 1 \quad \forall n$$



Sin embargo, la sucesión

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \rho(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$$

puede tener un límite bien definido.

$\Rightarrow$  La sucesión  $\{f_n(x)\}$  define una distribución  $\Gamma(x)$ .

Def: La distribución  $\Gamma(x)$  asociada a  $\{f_n(x)\}$  es  $\text{tp}$

$$\int \Gamma(x) \rho(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) \rho(x) dx$$

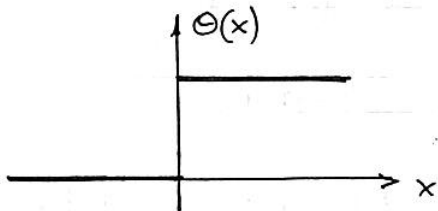
Ejemplo:  $\delta(x)$  (Delta de Dirac)

Def:  $\int \delta(x) \rho(x) dx = \rho(0)$

Definición: la distribución  $\Gamma' = \frac{d\Gamma}{dx}$  satisface

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma}{dx} \rho(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_n}{dx} \rho(x) dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \cancel{f_n(x) \rho(x)} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \frac{d\rho}{dx} dx \right\} = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x) \rho'(x) dx \end{aligned}$$

Ejemplo: Distribución  $\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$



(Función de Heaviside)

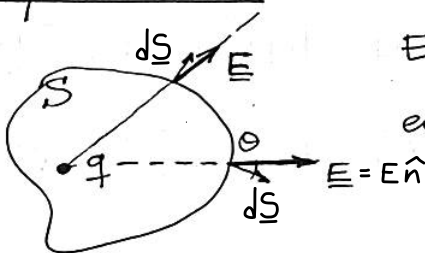
$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x) \rho(x) dx = \int_0^{\infty} \rho(x) dx$$

Wepo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta'(x) \rho(x) dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x) \rho'(x) dx = - \int_0^{\infty} \rho'(x) dx = \\ &= + \rho(0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Theta'(x) = \delta(x)$$

Ley de Gauss



El campo generado por  $q$  en  $r'$  en un pto  $r$  es

$$\mathbf{E}(r) = \frac{q (r - r')}{|r - r'|^3}$$

Calculamos el flujo por la superficie cerrada  $S$  es

$$\begin{aligned}\phi &= \oint_S \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{S} = \oint_S q \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \cdot d\underline{S} = \oint_S q \frac{\hat{n} \cdot d\underline{S}}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2} = \\ &= \oint_S q \frac{\cos\theta ds}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2}\end{aligned}$$

$\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \hat{n}$

y  $\cos\theta ds = r^2 d\Omega$  (sólido) ( $r = |\underline{r}-\underline{r}'|$ )  
 $\Rightarrow$  es la proyección sobre una esfera unitaria centrada en  $\underline{r}'$ . Luego

$$\oint_S \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{S} = \begin{cases} 4\pi q & \text{si } \underline{r}' \text{ en el interior de } S \\ 0 & \text{si } \underline{r}' \text{ afuera} \end{cases}$$

En el caso general  $\underline{E}(\underline{r}) = \int \rho(\underline{r}') \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} d^3\underline{r}'$

y esta integral es sobre  $\underline{r}'$ , mientras que la integral del flujo es sobre  $\underline{r}$ . Usando superposición

$$\oint_S \underline{E} \cdot d\underline{S} = 4\pi \int \rho(\underline{r}') dV' = 4\pi Q_{\text{ENC}}$$

Usando el teo. de Gauss

$$\oint_S \underline{E} \cdot d\underline{S} = \int_{V(S)} \nabla \cdot \underline{E} dV = \int 4\pi \rho(\underline{r}) dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi \rho} \quad \text{Ley de Gauss}$$