FÍSICA TEÓRICA 1

Ecuaciones de Maxwell (CGS Gaussiano) en vacío:

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = 4\pi\rho \qquad \text{(Ley de Gauss)}$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \qquad \text{(Ley de Faraday)}$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0 \qquad \text{(Inexistencia de monopolos)}$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \qquad \text{(Ley de Ampère generalizada)}$$

corriente de desplazamiento
(necesaria para conservar la carga)

Tomando $\frac{\partial}{\partial t}$ de la ley de Gauss

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\underline{\nabla}\cdot\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi}\underline{\nabla}\cdot\left(\underline{\nabla}\times\underline{B} - \frac{4\pi}{c}\underline{J}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot\underline{J} = 0 \qquad \text{(Ec. de continuidad)}$$

Campos de gradientes y rotores

Dado un campo vectorial $\underline{W}(\underline{x})$, se puede descomponer univocamente* como

$$\underline{W} = \underline{V} + \underline{U}$$

tq $\underline{\nabla}\times\underline{V} = 0$ (irrotacional) y $\underline{\nabla}\cdot\underline{U} = 0$ (solenoidal)

Dem: Como $\underline{\nabla} \times \underline{V} = 0 \Rightarrow \exists\, \varphi \,/\, \underline{\nabla}\varphi = \underline{V}$

Tomando la divergencia

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{W} = \nabla^2 \varphi \qquad \text{(Ec. de Poisson)}$$

La ec. tiene solución

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\underline{\nabla} \cdot \underline{W}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \, d^3\underline{r}'$$

y luego $\underline{V} = \underline{\nabla}\varphi$.

Luego

$$\underline{U} = \underline{W} - \underline{V} = \underline{W} - \underline{\nabla}\varphi$$

Veamos que es solenoidal

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{U} = \underline{\nabla} \cdot \underline{W} - \nabla^2\varphi = \nabla^2\varphi - \nabla^2\varphi = 0$$

Además, como $\underline{\nabla} \cdot \underline{U} = 0 \Rightarrow \exists\, \underline{A} \,/\, \underline{U} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$

y

$$\underline{W} = \underline{\nabla} \times \underline{A} + \underline{\nabla}\varphi$$

(* esta descomposición final es única salvo por un gradiente en la determinación de $\underline{A}$).

Para determinar $\underline{A}$ tomamos

$$\underline{\nabla} \times \underline{W} = \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{A} + \cancel{\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla}\varphi)} =$$

$$= \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{A}) - \nabla^2 \underline{A} \qquad (1)$$

Podemos pedir $\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0$

$$\Rightarrow \underline{\nabla} \times \underline{W} = -\nabla^2 \underline{A}$$

El laplaciano de un vector está definido como

$$(\underline{\nabla} \times \underline{W})_i = -\nabla^2 A_i \qquad i = 1,2,3$$

i.e., el laplaciano de cada componente.

$$\Longrightarrow \quad \underline{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \underline{W}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \, d^3\underline{r}'$$

<u>Notación de índices</u>

Representamos las componentes de vectores y tensores por subíndices, y utilizamos convención de la suma para índices repetidos. Antes, definamos dos tensores útiles

<u>Tensor de Kronecker:</u> Es un tensor de rango 2 tq

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

<u>Tensor de Levi-Civita</u>: Es un pseudo-tensor de rango 3 tq sus componentes son

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i,j,k \text{ es permutación par de } x,y,z \\ -1 & \text{si } i,j,k \text{ es permutación impar de } x,y,z \\ 0 & \text{si se repite algún índice} \end{cases}$$

Luego podemos escribir

$$(\underline{A} \times \underline{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

<u>Ej</u>: $(\underline{A} \times \underline{B})_1 = \varepsilon_{1jk} A_j B_k = A_2 B_3 - A_3 B_2$

Si $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son vectores $\Rightarrow$ $\underline{A} \times \underline{B}$ es un pseudovector.

Usemos esto para probar (1):

$$\left[\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})\right]_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\left(\underline{\nabla}\times\underline{A}\right)_k = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\left(\varepsilon_{klm}\,\partial_l A_m\right) =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm}\,\partial_j\partial_l A_m = \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{klm}\,\partial_j\partial_l A_m =$$

$$= \left(\delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl}\right)\partial_j\partial_l A_m =$$

$$= \partial_i\partial_j A_j - \partial_j\partial_j A_i$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \nabla^2\underline{A}$$

<u>Electrostática</u> :

La fuerza que siente una carga q_1 en $\underline{r}_1$ debido a una carga q_2 en $\underline{r}_2$ es

$$\underline{F}_{12} = k\, q_1 q_2 \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3}$$

(Ley de Coulomb)
($k=1$ en CGS-gaussiano)

Notar que $\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$ y la fza. está dirigida a lo largo de la recta que une las dos cargas (satisface el ppio. de acción fuerte).

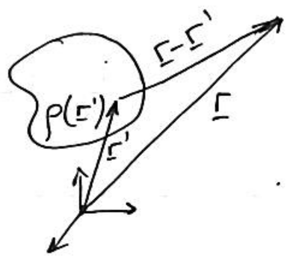
El campo eléctrico en un pto. $\underline{r}$ se define como

$$\underline{E}(\underline{r}) = \lim_{\delta q\to 0} \frac{\underline{F}(\delta q(\underline{r}))}{\delta q(\underline{r})}$$

con δq carga de prueba

Luego, dada una distribución de carga $\rho(\underline{r}')$ el campo en $\underline{r}$ es

$$d\underline{E}(\underline{r}) = \rho(\underline{r}')\,\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}\,d^3r'$$



y $\boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \int \frac{\rho(\underline{r}')(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \, d^3\underline{r}'}$ ← ppio. de superposición con Coulomb pto. a pto.

tq. $\underline{F} = q\underline{E}$

En muchos casos, la distribución de carga no está dada en volumen (ej: densidad de carga en superficie, cargas puntuales, etc.)

<u>Distribuciones</u>

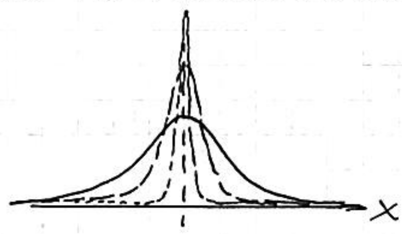
Dada una sucesión de funciones $\{f_n(x)\} \in \mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$ tq $\forall \, \rho(x) \in \mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\rho(x)\,dx \quad \text{es finita}$$

Puede ocurrir que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \notin \mathbb{L}^2(-\infty,\infty)$

<u>Ejemplo</u>: $\{f_n(x)\} = N_n e^{-nx^2}$ con N_n normalización

i.e. tq $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = 1 \quad \forall n$



Sin embargo, la sucesión

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\rho(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} I$$

puede tener un límite bien definido.

⟹ La sucesión $\{f_n(x)\}$ define una distribución $\Gamma(x)$.

<u>Def</u>: La distribución $\Gamma(x)$ asociada a $\{f_n(x)\}$ es tq

$$\int \Gamma(x)\,\rho(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,\rho(x)\,dx$$

Ejemplo: $\delta(x)$ (Delta de Dirac)

Def: $$\int \delta(x)\,\rho(x)\,dx = \rho(0)$$

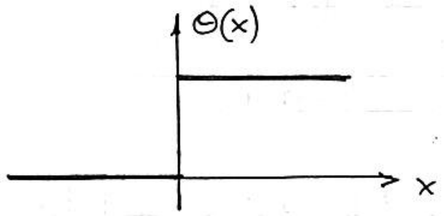
Definición: la distribución $\Gamma' = \frac{d\Gamma}{dx}$ satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma}{dx}\,\rho(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_n}{dx}\,\rho(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \cancel{f_n(x)\,\rho(x)}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,\frac{d\rho}{dx}\,dx \right\} =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x)\,\rho'(x)\,dx$$

Ejemplo: Distribución $\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{cases}$



(Función de Heaviside)

$\forall \rho$ $$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)\,\rho(x)\,dx = \int_0^{\infty} \rho(x)\,dx$$

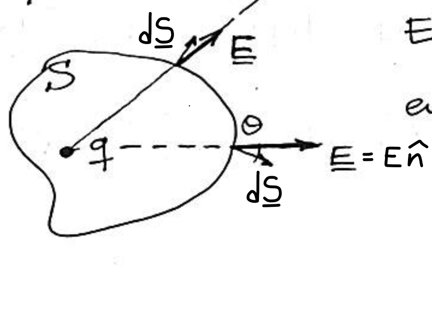
Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta'(x)\,\rho(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)\,\rho'(x)\,dx = -\int_0^{\infty} \rho'(x)\,dx =$$

$$= +\rho(0)$$

$$\Longrightarrow \quad \Theta'(x) = \delta(x)$$

Ley de Gauss



El campo generado por q en $\underline{r}'$ en un pto $\underline{r}$ es

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q\,(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Calculamos el flujo por la superficie cerrada S es

$$\phi = \oint_S \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{S} = \oint_S \frac{q\,(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \cdot d\underline{S} = \oint_S q\,\frac{\hat{n} \cdot d\underline{S}}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2} =$$

$$\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \hat{n}$$

$$= \oint_S q\,\frac{\cos\theta\, dS}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2}$$

y $\cos\theta\, dS = r^2 d\Omega$ (ángulo sólido) $(r = |\underline{r}-\underline{r}'|^2)$

$\Rightarrow$ es la proyección sobre una esfera unitaria centrada en $\underline{r}'$. Luego

$$\oint_S \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{S} = \begin{cases} 4\pi q & \text{si } \underline{r}' \text{ en el interior de } S \\ 0 & \text{si } \underline{r}' \text{ afuera} \end{cases}$$

En el caso general $\underline{E}(\underline{r}) = \int \rho(\underline{r}')\,\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}\, d^3\underline{r}'$

y esta integral es sobre $\underline{r}'$, mientras que la integral del flujo es sobre $\underline{r}$. Usando superposición

$$\oint_S \underline{E} \cdot d\underline{S} = 4\pi \int \rho(\underline{r}')\, dV' = 4\pi\, Q_{ENC}$$

Usando el teo. de Gauss

$$\oint_S \underline{E} \cdot d\underline{S} = \int_{V(S)} \underline{\nabla} \cdot \underline{E}\, dV = \int 4\pi \rho(\underline{r})\, dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 4\pi\rho} \quad \text{Ley de Gauss}$$