Potencial electrostático

Notar que $$\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = -\nabla_{\underline{r}}\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right) = \nabla_{\underline{r}'}\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)$$

Luego podemos escribir

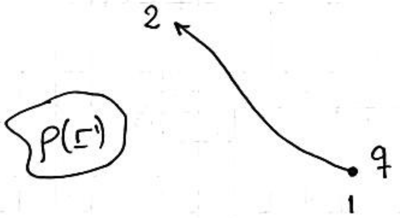
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\int \rho(\mathbf{r}')\, \nabla_{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d^3r' = -\nabla_{\mathbf{r}}\left(\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV'\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi^{\circledast} \quad \text{con} \quad \varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' + \text{cte.}$$

Usando la ley de Gauss: $\qquad$ $\circledast$ Luego $\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0}$

$$\nabla\cdot(-\nabla\varphi) = 4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2\varphi = -4\pi\rho}$$ Ec. de Poisson

El potencial electrostático tiene además una interpretación física bien definida. Calculemos el trabajo para llevar una carga q de un pto. 1 a 2 contra la fza. electrostática



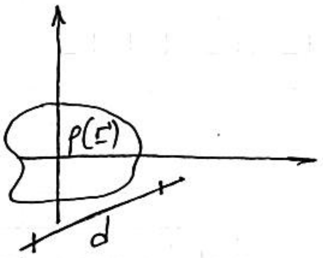
$$W = -\int_1^2 q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = q\int_1^2 \nabla\varphi\cdot d\mathbf{l} =$$

$$= q\left(\varphi(2) - \varphi(1)\right)$$

independiente del camino.

<u>Desarrollo multipolar de φ</u>

Consideremos una distribución de carga localizada en una región de long. d, y miremos el potencial para $|\mathbf{r}| \gg d$. Por Taylor alrededor de $\mathbf{r}'=0$



$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \partial_i'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)_{\mathbf{r}'=0} \cdot r_i' +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\partial_i'\partial_j'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)_{\mathbf{r}'=0} r_i' r_j' + \ldots$$

y $\quad \partial_i' \left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)_{\underline{r}'=0} = \frac{r_i - r_i'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}\Bigg|_{\underline{r}'=0} = \frac{r_i}{|\underline{r}|^3}$

$$\partial_i' \partial_j' \left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)_{\underline{r}'=0} = \partial_j' \left(\frac{r_i - r_i'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}\right) = \left[-\frac{\delta_{ij}}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} + \frac{3(r_i - r_i')(r_j - r_j')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^5}\right]_{\underline{r}'=0}$$

$$= \frac{3 r_i r_j - \delta_{ij} r^2}{r^5}$$

Luego $\quad \phi(\underline{r}) = \int dV' \rho(\underline{r}') \left\{ \frac{1}{r} + \frac{r_i r_i'}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3 r_i r_j - \delta_{ij} r^2}{r^5} r_i' r_j' + \dots \right\}$

$$= \phi^{(0)}(\underline{r}) + \phi^{(1)}(\underline{r}) + \phi^{(2)}(\underline{r}) + \dots$$

1) Término monopolar:

$$\phi^{(0)}(\underline{r}) = \frac{Q}{r} \qquad \text{con} \quad Q = \int \rho(\underline{r}') \, dV'$$

Una distribución de carga con $Q \neq 0$ se ve como una carga puntual si $\underline{r}$ es lo suficientemente grande

$\phi^{(0)}$ es isótropo $\quad$ y $\quad \phi \xrightarrow[r\to\infty]{} 1/r \quad$ si $Q \neq 0$

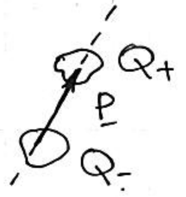
2) Término dipolar:

$$\phi^{(1)}(\underline{r}) = \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r^3} \qquad \text{con} \quad \underline{p} = \int \rho(\underline{r}') \, \underline{r}' \, dV$$

(momento dipolar eléctrico)

Si $Q = 0$ y $\underline{p} \neq 0 \qquad \phi \xrightarrow[r\to\infty]{} 1/r^2$

y tengo una dirección privilegiada en el espacio.

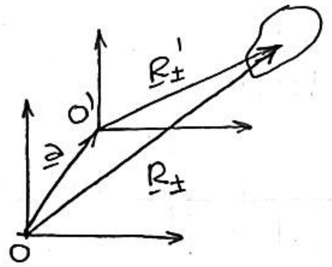


$|Q_+| = |Q_-|$

Consideremos dos dist. de carga

$$\underline{p} = Q_+ \underline{R}_+ + Q_- \underline{R}_- \underset{\text{si } |Q_+| = |Q_-|}{=} Q_+ (\underline{R}_+ - \underline{R}_-)$$

Tomando cambio de origen



$$\underline{R}_\pm' = \underline{R}_\pm - \underline{a}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{p}' = Q_+ (\underline{R}_+ - \underline{a}) + Q_- (\underline{R}_- - \underline{a}) =$$
$$= \underline{p} - (Q_+ + Q_-)\underline{a} =$$
$$= \underline{p} - Q\underline{a} \qquad \text{depende del origen}$$

Si $Q=0 \Rightarrow \underline{p} = \underline{p}'$ y el momento es indep. del origen.

¿$\exists$ alguna distribución puntual tq. el pot. exacto sea

$$\phi(\underline{r}) = \frac{\underline{p}\cdot(\underline{r}-\underline{r}_0)}{|\underline{r}-\underline{r}_0|^3} \; ?$$

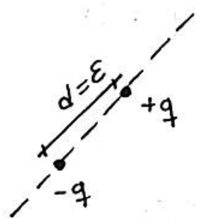
Queremos

$$\phi(\underline{r}) = \underbrace{\frac{Q}{r}}_{=0} + \frac{\underline{r}\cdot\int \rho(\underline{r}')\,\underline{r}'\,dV'}{r^3} + \underbrace{\cdots}_{=0}$$

van como ρd^2 o mayor

Pedimos $Q=0$ y

$$\left.\begin{array}{l} \rho \to \infty \\ d \to 0 \end{array}\right\} \text{ tq } \rho d \to p \text{ finito}$$



$$\phi(\underline{r}) = \lim_{\substack{q\to\infty \\ \varepsilon = d \to 0 \\ qd \to p}} \frac{q}{|\underline{r}-(\underline{r}'+\varepsilon\hat{p})|} - \frac{q}{|\underline{r}-\underline{r}'|} =$$

$$= \lim \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{q\varepsilon}{|\underline{r}-(\underline{r}'+\varepsilon\hat{p})|} - \frac{q\varepsilon}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right] =$$

$$= p\,\frac{\partial'}{\partial\hat{p}}\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right) = \frac{\underline{p}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

y

$$\rho_{\underline{p}}(\underline{r}) = \lim_{\substack{q\to\infty \\ \varepsilon = d \to 0 \\ qd \to p}} q\,\delta(\underline{r}-(\underline{r}'+\varepsilon\hat{p})) - q\,\delta(\underline{r}-\underline{r}') =$$

$$= \lim \frac{1}{\varepsilon}\left[\varepsilon q\,\delta(\underline{r}-(\underline{r}'+\varepsilon\hat{p})) - \varepsilon q\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')\right] =$$

$$= p\,\frac{\partial'}{\partial\hat{p}}\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{\underline{p}}(\underline{r}) = (\underline{p}\cdot\underline{\nabla}')\,\delta(\underline{r}-\underline{r}') = -(\underline{p}\cdot\underline{\nabla})\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

Podemos introducir un dipolo puntual como

$$\underline{P}(\underline{r}) = \underline{p}\,\delta(\underline{r}-\underline{r}') \Rightarrow \rho_{\underline{P}}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\cdot\underline{P}$$

3) Término cuadrupolar:

$$\phi^{(2)}(\underline{r}) = \frac{1}{2}\frac{(3r_ir_j - \delta_{ij}r^2)}{r^5}\,C_{ij} \quad \text{con} \quad c_{ij} = \int \rho(\underline{r}')\,r_i'r_j'\,dV$$

Podemos escribir

$$(3r_ir_j - \delta_{ij}r^2)\,c_{ij} = (3r_ir_j - \delta_{ij}\,r_kr_\ell\,\delta_{k\ell})\,C_{ij} =$$

$$= (3r_ir_j - \underbrace{\delta_{k\ell}\,\delta_{ij}\,r_kr_\ell)\,c_{ij}}_{\delta_{ij}\,\delta_{k\ell}\,r_ir_j\,c_{k\ell}} = r_ir_j\,(3\,c_{ij} - c_{\ell\ell}\,\delta_{ij})$$

y tomando $Q_{ij} = 3\,c_{ij} - c_{\ell\ell}\,\delta_{ij}$ (tensor momento cuadrupolar)

$$\Rightarrow \quad Q_{ij} = \int \rho(\underline{r}')\,(3\,r_i'r_j' - \delta_{ij}\,r'^2)\,dV'$$

y $$\phi^{(2)}(\underline{r}) = \frac{1}{2}\frac{r_ir_j}{r^5}\,Q_{ij} \xrightarrow[\underline{r}\to\infty]{} 1/r^3$$

Notar que $\operatorname{tr}\underline{\underline{Q}} = Q_{ii} = 0$ y $\underline{\underline{Q}}$ simétrico.
Se puede diagonalizar y obtener ejes ppales. Me mide cuánto se aparta de una dist. esférica de carga.

<u>Campo electrostático en medios materiales</u>

En un medio material, las cargas pueden desplazarse como respuesta al campo aplicado. En un conductor, pueden desplazarse distancias macroscópicas y acumularse en los contornos, generando densidad superficial σ y $\underline{E}=0$ en el interior.

En un dieléctrico el reordenamiento es microscópico y el efecto dominante es el de polarización:

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = 4\pi\left(\rho_\ell + \rho_P\right) \qquad \text{con} \quad \rho_P = -\underline{\nabla}\cdot\underline{P}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\nabla}\cdot\left(\underline{E} + 4\pi\underline{P}\right) = 4\pi\rho_\ell \longleftarrow \text{cargas libres}$$

Definimos $\boxed{\underline{D} = \underline{E} + 4\pi\underline{P}}$ Vector desp. eléctrico

Además $\boxed{\underline{\nabla}\times\underline{E} = 0}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{D} = 4\pi\rho_\ell} \quad \text{y} \quad \underline{\nabla}\times\underline{D} = 4\pi\,\underline{\nabla}\times\underline{P}$$

Veamos la relación entre $\underline{P}$ y $\underline{E}$ (relación constitutiva del medio): podemos desarrollar

$$\underline{P}(\underline{E}) = \underline{P}(0) + \left.\frac{\partial\underline{P}}{\partial E_i}\right|_{\underline{E}=0} E_i + \left.\frac{\partial^2\underline{P}}{\partial E_i E_j}\right)_{\underline{E}=0} E_i E_j + \ldots$$

caracterizan el medio material

Si $\underline{P}(0) \neq 0$ tienen polarización permanente (electretes).
Si $\underline{P}(0) = 0$ y $\underline{E}$ débil tenemos respuesta lineal

$$\boxed{P_i = \chi_{ij}\,E_j} \qquad \text{con} \quad \chi_{ij} = \left.\frac{\partial P_i}{\partial E_j}\right|_{\underline{E}=0}$$

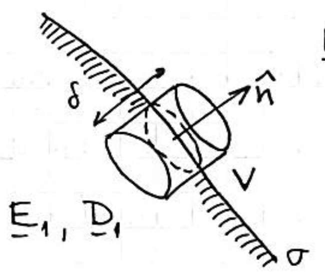
tensor de susceptibilidad eléctrica

Si el medio es isótropo $\boxed{\underline{P} = \chi \underline{E}}$

Dado $\underline{P} = \underline{\underline{\chi}}\,\underline{E} \Longrightarrow \underline{D} = \left(1 + 4\pi \underline{\underline{\chi}}\right)\underline{E} = \underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{E}$

tensor de permitividad eléctrica

<u>Condiciones de contorno para el campo $\underline{E}$ en interfaces</u>



Tenemos $\oint_S \underline{D}\cdot d\underline{S} = 4\pi Q^L_{enc}$

Para $\delta \longrightarrow 0$

$$\oint_S \underline{D}\cdot d\underline{s} = \left(\underline{D}_2 - \underline{D}_1\right)\cdot \hat{n}\,\delta$$

Además $4\pi \int_V \rho\, d^3r = 4\pi \rho\, \delta S = 4\pi\sigma\delta$

$$\Longrightarrow \boxed{\left(\underline{D}_2 - \underline{D}_1\right)\cdot\hat{n} = 4\pi\sigma}$$

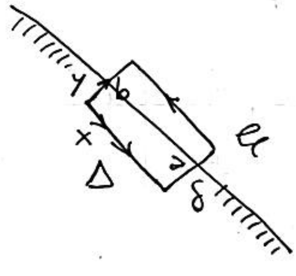
Si $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{1\!\!1}} \Longrightarrow \left(\underline{E}_2 - \underline{E}_1\right)\cdot\hat{n} = 4\pi\sigma$

y $\left(-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right) = 4\pi\sigma$

pero φ continuo:

Tomemos ahora. $\oint \underline{E}\cdot d\underline{l} = 0$

$$\Longrightarrow \left(E_{x_1} - E_{x_2}\right)\Delta + \left(E_y^a - E_y^b\right)\delta = 0$$



y para $\delta \to 0$ $E_{x_1} = E_{x_2}$

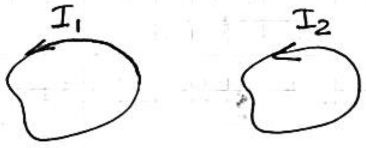
o bien

$$\boxed{\hat{n}\times\left(\underline{E}_2 - \underline{E}_1\right) = 0}$$

y $\boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = 0} = \int \underline{E}\cdot d\underline{l}$.

Magnetostática:

La fuerza que siente un circuito 1 por el que circula una corriente I_1 debida a un circuito 2 con corriente I_2 es



$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{c^2} \oint I_1\, d\mathbf{l}_1 \times \oint \frac{I_2\, d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

(Ley de Ampère)

Notar que, a diferencia de la ley de Coulomb, es una expresión global y que no está escrita para cada elemento diferencial ($I\,d\mathbf{l}$ no es equivalente a q: en el segmento dl, la corriente debe venir de algún lado e ir a algún lado para satisfacer continuidad)

Notar que de continuidad

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}}_{\text{estacionario}} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \implies \text{¡las líneas de corriente son cerradas!}$$

La expresión satisface acción y reacción:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{c^2} \oint\oint I_1\, d\mathbf{l}_1 \times \left(I_2\, d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \right) =$$

$A \times B \times C = - B \times A \times C$

$$= -\frac{1}{c^2} \oint\oint I_2\, d\mathbf{l}_2 \times \left(I_1\, d\mathbf{l}_1 \times \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \right) = -\mathbf{F}_{21}$$

Puedo introducir un campo magnético tomando

(asociado al circ. 2)

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{c} \oint I_1\, d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1)$$

con

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{c} \oint \frac{I_2\, d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

y en general

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\underline{d}(\underline{r}') \times (\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}\, dV'}$$