Ley de Ampère

Tomemos $\quad \underline{\nabla} \times \underline{B}(\underline{r}) = \frac{1}{c} \underline{\nabla}_{\underline{r}} \times \left(\int \underline{j}(\underline{r}') \times \underbrace{\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}_{= -\underline{\nabla}_{\underline{r}}\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right) \equiv -\underline{\nabla}_{\underline{r}} \phi} dV' \right)$

Calculemos

$$\left[\underline{\nabla}_{\underline{r}} \times \left(\underline{j}' \times \underline{\nabla}_{\underline{r}} \phi\right)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} j'_l \partial_m \phi =$$
$$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j (j'_l \partial_m \phi) =$$
$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j (j'_l \partial_m \phi) =$$
$$= \partial_m j'_i \partial_m \phi - \underbrace{\partial_l j'_l \partial_i \phi}_{= 0 \ (*)} = j'_i \underline{\nabla}^2_{\underline{r}} \phi$$

Veamos (*). Reemplazando en la integral

$$\int dV' \partial_l j'_l \partial_i \phi = \partial_i \int dV' j'_l \partial_l \phi \underset{\underline{\nabla}_{\underline{r}} \phi = -\underline{\nabla}_{\underline{r}'} \phi}{=} - \partial_i \int dV' j'_l \partial'_l \phi \overset{\text{partes}}{=}$$

$$= -\partial_i \left[\underbrace{\int dV' \partial'_l (j'_l \phi)}_{=0} - \underbrace{\int dV' \phi \, \partial'_l j'_l}_{=0} \right] = 0$$

pues es la integral de una div. y $\underline{j}\phi \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$ $\qquad$ pues $\underline{\nabla} \cdot \underline{j} = 0$

$$\Rightarrow \underline{\nabla} \times \underline{B} = -\frac{1}{c} \int \underline{j}(\underline{r}') \underbrace{\nabla^2 \left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)}_{= 4\pi \delta(\underline{r}-\underline{r}')} dV'$$

x Ec. de Poisson $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi \delta(r)$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\nabla} \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}}$$

Potencial vector

Tenemos $$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{1}{c}\int \underline{j}(\underline{r}') \times \left(-\underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right) dV'$$

Calculemos

$$\left[\underline{j}' \times (-\nabla\phi)\right]_i = -\varepsilon_{ijk}\, j_j'\, \partial_k\phi = \varepsilon_{ikj}\, \partial_k(j_j'\phi) = \left[\underline{\nabla}\times(\underline{j}'\phi)\right]_i$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{B} = \underline{\nabla}\times\left(\frac{1}{c}\int \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} dV'\right)$$

Luego podemos escribir

$$\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A} \quad \text{con} \quad \underline{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} dV' + \underline{\nabla}\chi$$

Luego $\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0}$

Usando la ley de Ampère

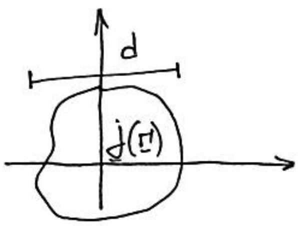
$$\underline{\nabla}\times\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\times\underline{A} = \frac{4\pi}{c}\underline{j} = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \nabla^2\underline{A}$$

Eligiendo $\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = 0$ $(\chi = 0)$ (este es el gauge de coulomb)

$$\boxed{\nabla^2\underline{A} = \frac{4\pi}{c}\underline{J}}$$

Desarrollo multipolar de $\underline{A}$

Tenemos una distribución con tamaño típico d



$$\underline{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} dV'$$

Si $d \ll |\underline{r}|$, desarrollamos alrededor de $\underline{r}' = 0$

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{r_i r_i'}{r^3} + \dots$$

Reemplazando en $\underline{A}(\underline{r})$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \underbrace{\frac{1}{cr}\int \underline{j}(\underline{r}')\,dV'}_{=\,0^*} + \underbrace{\frac{1}{cr^3}\int (\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}')\,dV'}_{=\,\underline{A}^{(1)}} + \dots$$

*pues

$$\int j_i\,dV = \int \overbrace{(\partial_\ell r_i)}^{=\,\delta_{\ell i}} j_\ell\,dV = \int \underbrace{\partial_\ell (r_i j_\ell)\,dV}_{\substack{=\,0 \\ \text{si } \underline{j} \text{ localizada}}} - \int r_i \underbrace{\partial_\ell j_\ell}_{=\,0 \text{ x } \underline{\nabla}\cdot\underline{j}=0} dV$$

Veamos el primer término no nulo

$$A_i^{(1)}(\underline{r}) = \frac{1}{cr^3}\int r_\ell r'_\ell\, j'_i\,dV'$$

$$\int r'_\ell j'_i\,dV' = \int r'_\ell (\partial'_k r'_i)\, j'_k\,dV' = \cancel{\int \partial'_k (r'_i r'_\ell j'_k)\,dV'} -$$

$$- \underbrace{\cancel{\int (\partial'_k j'_k)\, r'_i r'_\ell\,dV'}}_{=\,0} - \int r'_i (\partial'_k r'_\ell)\, j'_k\,dV =$$

$$= -\int r'_i j'_\ell\,dV$$ y es una matriz antisimétrica.

$\Rightarrow$ tiene solo 3 componentes independientes y puedo definir un pseudovector $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$

Tomamos

$$\int (r'_\ell j'_i\,dV')\, r_\ell = \frac{r_\ell}{2}\int (r'_\ell j'_i - r'_i j'_\ell)\,dV' = \left[\frac{1}{2}\int (\underline{r}'\times\underline{j}')\times\underline{r}\,dV'\right]$$

$$\Rightarrow \quad \underline{A}^{(1)}(\underline{r}) = \frac{\underline{m}\times\underline{r}}{r^3} \qquad \text{con} \quad \underline{m} = \frac{1}{2c}\int \underline{r}'\times\underline{j}'\,dV'$$ (momento dipolar magnético)

$$\text{y} \quad \underline{B}^{(1)}(\underline{r}) = \underline{\nabla}\times\underline{A}^{(1)}$$

Campo magnético en medios materiales

Ahora $\quad \underline{\nabla} \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\underline{j}_e + c \underline{\nabla} \times \underline{M} \right)$

y $\quad \underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$

Definimos $\quad \underline{H} = \underline{B} - 4\pi \underline{M} \quad$ con $\underline{H}$: intensidad magnética

y

$$\underline{\nabla} \times \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}_e$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{H} = -4\pi \underline{\nabla} \cdot \underline{M}$$

Necesito relaciones constitutivas $\underline{M} = \underline{M}(\underline{H})$ según el medio.

Si el medio es lineal

$$\underline{M} = \underline{\underline{\chi}}_m \underline{H}$$

$\underline{\underline{\chi}}_m$: tensor permeabilidad magnética

En el caso isótropo

$$\underline{M} = \chi_m \underline{H} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \chi_m > 0 & \text{paramagnético} \\ \chi_m < 0 & \text{diamagnético} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{B} = \underline{H} + 4\pi \underline{M} = \underbrace{(1 + 4\pi \chi_m)}_{\mu} H \quad \Rightarrow \quad \underline{B} = \mu \underline{H}$$

Condiciones de contorno para el campo B en interfaces

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\underline{B}_2 - \underline{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

(no hay monopolos)

$$\underline{\nabla} \times \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}_e \quad \Rightarrow \quad \hat{n} \times (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \underline{K}_e$$

densidad de corriente en sup.

Tratamiento teórico del potencial electrostático

Teorema de Green

Partimos del teorema de la divergencia

$$\int_V \underline{\nabla}\cdot\underline{A}\, dV = \int_{S(V)} \underline{A}\cdot\hat{n}\, dS$$

Para la primera identidad de Green tomamos $\underline{A} = \phi\underline{\nabla}\psi$

$$\Rightarrow \int_V \underline{\nabla}\cdot(\phi\underline{\nabla}\psi)\, dV = \int_{S(V)} (\phi\underline{\nabla}\psi)\cdot\hat{n}\, dS$$

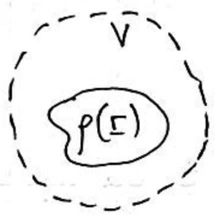
$$\Rightarrow \int_V \left[(\underline{\nabla}\phi)\cdot(\underline{\nabla}\psi) + \phi\nabla^2\psi\right] dV = \int_{S(V)} \phi\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}}\, dS$$

Tomando $\underline{A} = \psi\underline{\nabla}\phi$ y restando m.a m.

$$\boxed{\int_V \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right) dV = \int_{S(V)} \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}}\right) dS}$$

(Teorema de Green)

Consideremos ahora una dist. de cargas, un volumen V, y asociemos



$$\begin{cases} \phi(\underline{r}) \longrightarrow \text{potencial electrostático } \varphi \\ \psi = \dfrac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \end{cases}$$

Reemplazando en el teo. de Green y usando

$$\nabla^2\psi = -4\pi\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho(\underline{r})$$

$$-4\pi\left[\int_V \varphi(\underline{r}')\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')\, dV' - \int_V \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, dV'\right] = \int_{S(V)} \varphi\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}\cdot\hat{n}\, dS' -$$

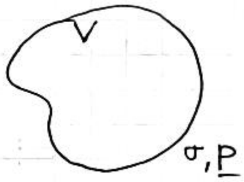
$$- \int_{S(V)} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{n}}\, dS'$$

Si $\underline{r} \in V$, el primer término es $\varphi(\underline{r})$

$$\Rightarrow \varphi(\underline{r}) = \underbrace{\int \frac{\rho(\underline{r})}{|\underline{r}-\underline{r}'|} dv'}_{\text{información de lo que ocurre en V}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{n}} ds' - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi\,(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}.\hat{n}\, ds'}_{\text{información de la superficie}}$$

$\Rightarrow$ Basta conocer $\rho(\underline{r})$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{n}}$ y $\varphi|_S$ para resolver φ en V.

No necesitamos conocer las fuentes externas: las fuentes externas pueden remplazarse por una densidad superficial de carga $\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{n}}$ y una densidad superficial de dipolos $\underline{P} = \frac{1}{4\pi}\varphi\hat{n}$



Notar que este es un resultado integral.
En el caso diferencial alcanzará con conocer φ o $\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{n}}$ en la superficie.

Unicidad de sol. de la ec. de Poisson

Consideremos la ec. de Poisson en una región finita del espacio con cond. de contorno en la sup.

$$\text{cdc} \longrightarrow \begin{array}{ll} (i)\ \varphi\big|_S & (\text{cond. de Dirichlet}) \\ (ii)\ \frac{\partial\varphi}{\partial\hat{n}}\Big|_S & (\text{cond. de Neumann}) \end{array}$$

El problema está definido por $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$, con ρ dato y cdc (i) o (ii).

(i) corresponde a especificar el potencial, mientras que (ii) corresponde a especificar el campo eléctrico.

Supongamos $\exists$ 2 soluciones φ_1 y φ_2. Tomando

$$u = \varphi_1 - \varphi_2$$

Reemplazando en la primer identidad de Green con $\phi = u$ y $\chi = u$

$$\underbrace{\int_V u\,\nabla^2 u}_{\substack{= 0 \\ \text{pues } \nabla^2 u = \nabla^2\varphi_1 - \nabla^2\varphi_2 = 0}} + \int_V |\underline{\nabla} u|^2\, dV = \underbrace{\int_{S(V)} u\,\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}\, dS}_{\substack{= 0 \\ \text{por (i) o (ii)}}}$$

$$\Rightarrow \int_V |\underline{\nabla} u|^2\, dV = 0$$

Como $|\underline{\nabla} u|^2$ es definida positiva, $\underline{\nabla} u = 0$.

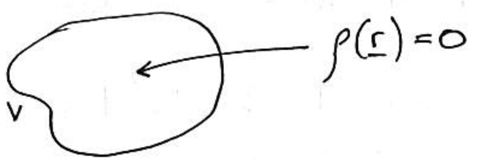
$$\Rightarrow u = \text{cte} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Si la cdc es (i) $u\big)_S = 0 \Rightarrow u = 0$ y $\varphi_1 = \varphi_2$

Si la cdc es (ii) $\varphi_1 = \varphi_2 + \text{cte}$ y el campo $\underline{E}$ es único.

<u>Ecuación de Laplace</u>

Consideremos el problema



$$\nabla^2\varphi = 0$$

y queremos obtener φ.