Método de separación de variables

Hipótesis:

1) La ec. debe ser separable en coord. x_1, x_2, x_3.

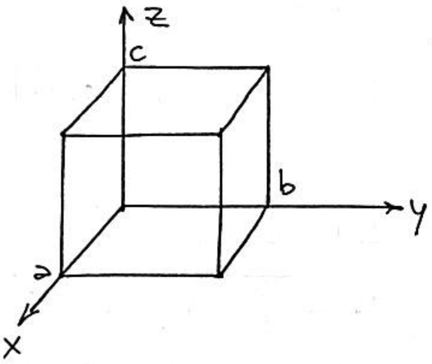
2) El contorno de V debe poder expresarse como un paralelepípedo en coord. x_1, x_2, x_3.

Buscamos una solución del tipo

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1)\, u_2(x_2)\, u_3(x_3)$$

tq $\nabla^2(u_1 u_2 u_3) = 0$ se convierta en tres ec. de una variable. Las soluciones en cada variable estarán conectadas por ctes. de separación λ_1 y λ_2.

<u>Ejemplo</u>: En <u>coord. cartesianas</u>



Tenemos contorno $\begin{cases} x=0 & y \quad x=a \\ y=0 & \quad\; y=b \\ z=0 & \quad\; z=c \end{cases}$

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad y \quad \varphi)_S \text{ es dato}$$

Reemplazando $\varphi = u_1(x_1)\, u_2(x_2)\, u_3(x_3)$ en $\nabla^2\varphi = 0$, queda

$$u_2 u_3 \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} + u_1 u_3 \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} + u_1 u_2 \frac{d^2 u_3}{dx_3^2} = 0$$

Dividiendo por $u_1 u_2 u_3$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{u_1}\frac{d^2 u_1}{dx_1^2}}_{\lambda_1} + \underbrace{\frac{1}{u_2}\frac{d^2 u_2}{dx_2^2}}_{\lambda_2} + \underbrace{\frac{1}{u_3}\frac{d^2 u_3}{dx_3^2}}_{\lambda_3 = -(\lambda_1+\lambda_2)} = 0$$

Busquemos una sol. gral.

$$\varphi(x_1 x_2 x_3) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} A_{\lambda_1,\lambda_2}\, u_{1,\lambda_1}\, u_{2,\lambda_2}\, u_{3,\lambda_1\lambda_2}$$

y las cond. de contorno están dadas por

$$\varphi(x_1=0,x_2,x_3)=\sum_{\lambda_1,\lambda_2} A_{\lambda_1\lambda_2}\, u_{1,\lambda_1}(0)\, u_{2\lambda_2}(x_2)\, u_{3,\lambda_1\lambda_2}(x_3)$$

(idem para $x_1=a$, etc.)

Pidamos que al menos en dos coord (ej, x_1 y x_2) las cond. de contorno se puedan aplicar a cada producto $u_1u_2u_3$ por separado $\Rightarrow$ puedo considerar el problema ec. dif. + cdc solamente para la variable x_1.

Por ejemplo, supongamos en el ejemplo que $\varphi(x_1=0)=\varphi(x_1=a)=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_1}\frac{d^2u_1}{dx_1^2}=\lambda_1 \qquad y \qquad u_1(0)=u_1(a)=0$$

$\Rightarrow$ Se obtiene un conjunto $\{u_{1,\lambda_1}\}$ con valores posibles para λ_1.

Además, cualquier $f(x_1)$ en $[0,a]$ que cumpla las cdc debe poder escribirse como $f(x_1)=\sum_{\lambda_1} A_{\lambda_1}\, u_{1,\lambda_1}(x_1)$.

$\Rightarrow$ las soluciones $\{u_{1,\lambda_1}\}$ deben ser una base del espacio.

Esto ocurre si la ec. diferencial y las cdc definen un

<u>Problema de Sturm-Liouville</u>.

En particular, de $\dfrac{d^2u_1}{dx_1^2}=\lambda_1 u_1$ y $u_1(0)=u_1(a)=0$

$$\Rightarrow u_{1,n}=\text{sen}\, k_n x_1 \qquad k_n=n\pi/a$$

$$k_n^2=-\lambda_1 \qquad (\lambda_1<0)$$

Para x_2, con $u_2(0)=u_2(b)=0$

$$u_{2,m}=\text{sen}\, k_m x_2 \qquad k_m=m\pi/b$$

Además, $$\frac{d^2u_3}{dx_3^2} = -(\lambda_{1n} + \lambda_{2m})\, u_3 = (k_n^2 + k_m^2)\, u_3 =$$
$$= \gamma_{nm}^2\, u_3$$

$$\Rightarrow \quad u_{3\,n,m}(x_3) = A_{nm}\, e^{\gamma_{nm} z} + B_{nm}\, e^{-\gamma_{nm} z}$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y,z) = \sum_{n,m} u_{1n}(x)\, u_{2m}(y) \left(A_{nm}\, e^{\gamma_{nm} z} + B_{nm}\, e^{-\gamma_{nm} z}\right) =$$
$$= \sum_{n,m} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \left(A_{nm}\, e^{\gamma_{nm} z} + B_{nm}\, e^{-\gamma_{nm} z}\right)$$

Supongamos que en z tengo cdc de Dirichlet

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z=0) = f(x,y) \\ \varphi(x,y,z=c) = g(x,y) \end{cases}$$

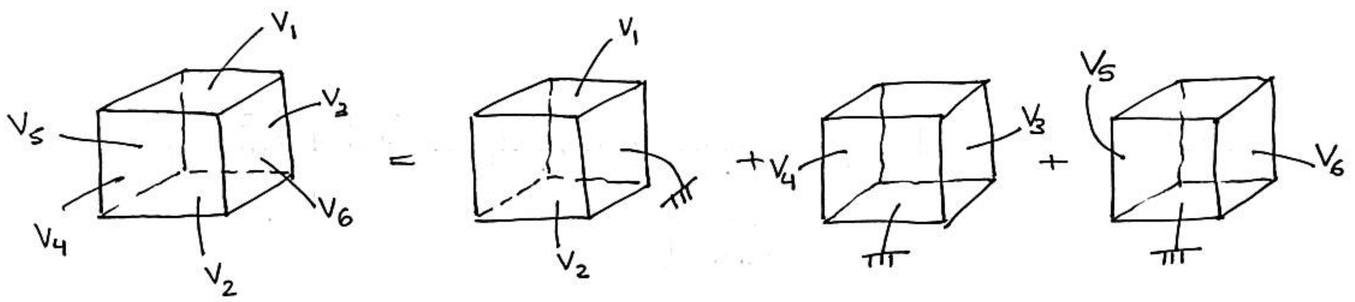
$$\Rightarrow \quad f(x,y) = \sum_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \left(A_{nm} + B_{nm}\right)$$
$$g(x,y) = \sum_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \left(A_{nm}\, e^{\gamma_{nm} c} + B_{nm}\, e^{-\gamma_{nm} c}\right)$$

y si $\{u_{1,n}\}$ y $\{u_{2,m}\}$ son base del espacio, tengo que poder desarrollar

$$f(xy) = \sum f_{nm}\, u_{1n}(x)\, u_{2m}(y)$$
$$g(xy) = \sum g_{nm}\, u_{1n}(x)\, u_{2m}(y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{nm} = A_{nm} + B_{nm} \\ g_{nm} = A_{nm}\, e^{\gamma_{nm} c} + B_{nm}\, e^{-\gamma_{nm} c} \end{cases}$$

¿Como resuelvo el caso general?



Problema de Sturm-Liouville

Ec. de la forma:

$$\left[\frac{-d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)+q(x)\right]u=\lambda\,\omega(x)\,u$$

con $\omega(x)$ definida positiva y $p(x)$ no nula en el intervalo (a,b), y con cdc tq dada una sol. u con autovalor λ_1 y una sol. v con autovalor λ_2, se cumple

$$p(x)\left[uv'-vu'\right]_a^b=0 \qquad (\lambda_1\neq\lambda_2)$$

Teorema: Dada una ec. diferencial con cdc tq definen un problema de Sturm-Liouville, si $[a,b]$ es finito

i) $\exists$ un conj. discreto de autovalores reales $\{\lambda_n,\ n\geq 1\}$ tq

$$|\lambda_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$$

ii) Autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales $\mathbb{L}^2_\omega[a,b]$

$$\int_a^b u^*_{\lambda_i}(x)\,u_{\lambda_j}(x)\,\omega(x)\,dx=\delta_{ij}\,C$$

iii) Las autofunciones normalizadas forman una base ortonormal de $\mathbb{L}^2_\omega[a,b]$

$\forall f(x)$ en $[a,b]$ $\qquad f(x) = \sum_{n\geq 1} A_n u_n(x)$

con los A_n dados por

$$\int_a^b w(x)\, u_m^*(x) f(x)\, dx = \sum_{n\geq 1} A_n \underbrace{\int_a^b w(x)\, u_m^*(x) u_n(x)\, dx}_{\delta_{nm}}$$

$$\Rightarrow A_m = \int_a^b u_m^*(x) f(x)\, \omega(x)\, dx$$

Reemplazando $\quad f(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x) \int_a^b u_n^*(x') f(x')\, \omega(x')\, dx' =$

$$= \int_a^b f(x') \underbrace{\left(\sum_{n\geq 1} u_n^*(x')\, u_n(x)\, w(x') \right)}_{\text{Debe ser la delta } \delta(x-x')} dx'$$

Luego tenemos:

Relación de ortogonalidad:

$$\int_a^b u_m^* u_n\, \omega\, dx = \delta_{nm}$$

Relación de completitud:

$$\omega(x') \sum_{n\geq 1} u_n^*(x)\, u_n(x') = \delta(x-x')$$

Si $[a,b]$ es infinito se tiene

i) $\exists$ un espectro continuo de autovalores reales

ii) Las autofunciones forman una base ortonormal de $\mathbb{L}^2_\omega[a,b]$

i.e. $\qquad f(x) = \int A(\lambda)\, u_\lambda(x)\, d\lambda$

y la relación de completitud se escribe

$$\omega(x) \int u_\lambda^*(x)\, u_\lambda(x')\, d\lambda = \delta(x-x')$$

Ejemplo: Supongamos $p(x) = \frac{\hbar^2}{2m}$

$$q(x) = V(x)$$
$$\omega(x) = 1$$

$\Rightarrow$ tengo $H\chi = E_n\chi$ y $\{\chi_n, E_n\}$ es base.(*)

$\Rightarrow$ cualquier estado puede escribirse como comb. lineal

$$\phi(x) = \sum A_n \chi_n$$

(*) para cdc convenientes.

Casos particulares de cdc:

1) $u(a) = u(b) = 0$ (Dirichlet)

2) $u'(a) = u'(b) = 0$ (Neumann)

3) $u(a) = u(b)$ (Periodicidad)

$u'(a) = u'(b)$