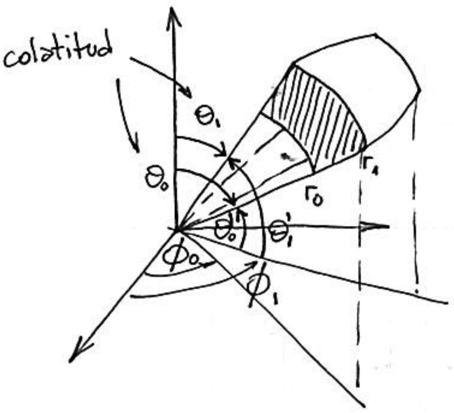
Coordenadas esféricas

Tenemos coord. (r, θ, ϕ) con contornos $\left\{ \begin{array}{l} r_1, r_2 \\ \theta_1, \theta_2 \\ \phi_1, \phi_2 \end{array} \right.$



y la ec. de Laplace

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) + \frac{1}{r^2 s\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(s\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2 s^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0$$

y separamos

$$\varphi = R(r)\, P(\theta)\, Q(\phi)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{rR}\frac{d^2}{dr^2}(rR) + \frac{1}{Pr^2 s\theta}\frac{d}{d\theta}\left(s\theta \frac{dP}{d\theta}\right)}_{= \alpha_1/s^2\theta} + \overbrace{\frac{1}{Qr^2 s^2\theta}\frac{d^2Q}{d\phi^2}}^{= -\alpha_1} = 0 \qquad (1)$$

$\Rightarrow Q(\phi)$ satisface $\boxed{\frac{d^2Q}{d\phi^2} = -\alpha_1 Q}$

Si las cdc en ϕ definen un problema de Sturm-Liouville, tenemos $\{Q_n, \alpha_{1n}\}$.

Si no hay contornos en ϕ $\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\phi=0) = \varphi(\phi=2\pi) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\phi}(\phi=0) = \frac{\partial\varphi}{\partial\phi}(\phi=2\pi) \end{array} \right.$

$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q(0) = Q(2\pi) \\ Q'(0) = Q'(2\pi) \end{array} \right.$ Si $\alpha_1 < 0$ $\nexists$ solución

Para $\alpha_1 \geq 0$, veamos $\alpha_1 = k^2$

$\Longrightarrow Q(\phi) = A\cos k\phi + B\,\mathrm{sen}\, k\phi + C + \cancel{D\phi}$ (por cdc)

Veamos $k \neq 0 \Rightarrow C = 0$

De las cdc $\boxed{k = m}$ con $m = 1, 2, \ldots$

Tenemos una base de funciones ortogonales en $[0, 2\pi)$

y

$$Q(\phi) = C_0 + \sum_{m \geq 1} A_m \cos m\phi + B_m \operatorname{sen} m\phi$$

Volviendo a (1) tenemos

$$\underbrace{\frac{r}{R} \frac{d^2}{dr^2}(rR)}_{\alpha_2} + \underbrace{\frac{1}{P s\theta} \frac{d}{d\theta}\left(s\theta \frac{dP}{d\theta}\right) - \frac{\alpha_1}{s^2\theta}}_{-\alpha_2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s\theta} \frac{d}{d\theta}\left(s\theta \frac{dP}{d\theta}\right) - \frac{\alpha_1 P}{s^2\theta} + \alpha_2 P = 0$$

y cuando tenemos periodicidad en ϕ, $\alpha_1 = m^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{s\theta} \frac{d}{d\theta}\left(s\theta \frac{dP}{d\theta}\right) + \left(\alpha_2 - \frac{m^2}{s^2\theta}\right) P = 0$$

Consideremos el <u>caso $m = 0$</u>:

$$\frac{1}{s\theta} \frac{d}{d\theta}\left(s\theta \frac{dP}{d\theta}\right) + \alpha_2 P = 0$$

y tomando $x = \cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left((1 - x^2) \frac{dP}{dx}\right) + \alpha_2 P = 0$$

Si el recinto es toda la esfera, i.e. $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \pi$
$\Rightarrow$ el problema está definido en el recinto $[-1, 1]$ en x.
Comparando con Sturm-Liouville, $p(x) = 1 - x^2$ y se anula en los extremos ± 1. Luego, siempre que P sea finita en $x = \pm 1$ tenemos un problema de Sturm-Liouville y tenemos base $\{P_m, \alpha_{2m}\}$.
(En otro caso, las cdc deben ser tq el problema sea de Sturm-Liouville).

Tomando $\alpha_2 = l(l+1)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{dP}{dx}\right) + l(l+1)P = 0} \qquad \text{Ec. de Legendre}$$

y tiene soluciones $\boxed{P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l}$ Polinomios de Legendre

$P_0(x) = 1$ con convención $P_l(x=1)=1$

$P_1(x) = x$ y con $l \geq m$ para que la ec. tenga

$P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$ soluciones finitas ($m=0$ en este caso)

$P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}$

...

Ortogonalidad: $\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \left(\frac{2}{2l+1}\right)\delta_{ll'}$

Completitud: Para $f(x) = \sum_l A_l P_l(x)$

con

$$A_l = \left(\frac{2l+1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)\,P_l(x)\,dx$$

$$\delta(x-x') = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{2l+1}{2}\right)P_l(x)P_l(x')$$

Formulas de recurrencia:

$$(l+1)P_{l+1} - (2l+1)xP_l + lP_{l-1} = 0$$

$$\frac{dP_{l-1}}{dx} = x\frac{dP_l}{dx} + (l+1)P_l$$

$$(x^2-1)\frac{dP_l}{dx} = lxP_l - lP_{l-1}$$

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)\,dx = 0 \qquad \forall\, l \neq 0$$

Veamos ahora el caso $m \neq 0$:

Tenemos las funciones asociadas de Legendre.

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x) \qquad (m \geq 0)$$

$$\Rightarrow \quad P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell$$

y $\quad P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \dfrac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(x)$

Para m fijo, $\{P_{\ell m}(x)\}$ es una base para las funciones en $[0,\pi]$. Además

<u>Ortogonalidad</u>: $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_\ell^m(x)\, P_{\ell'}^m(x)\, dx = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'}$

<u>Completitud</u>:

$$\delta(x-x') = \sum_\ell P_\ell^m(x)\, P_\ell^m(x') \left(\frac{2\ell+1}{2}\right) \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}$$

Para la sup. de la esfera completa tenemos Sturm-Liouville en θ y ϕ. Definimos los <u>armónicos esféricos</u>

$$Y_{\ell m}(\theta\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\; P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\phi} \qquad \ell = 0,1,2\ldots \quad -\ell \leq m \leq \ell$$

con relaciones de ortogonalidad

$$\int Y_{\ell m}^*(\theta\phi)\, Y_{\ell' m'}(\theta\phi)\, \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi = \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{mm'}$$

y de completitud

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta'\phi')\, Y_{\ell m}(\theta\phi) = \delta(\phi-\phi') \frac{\delta(\theta-\theta')}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

<u>Propiedades</u>: $\quad Y_{\ell,-m}(\theta,\phi) = Y_{\ell m}^*(\theta,\phi)\,(-1)^m$

$$Y_{\ell m}(\pi-\theta,\, \phi+\pi) = Y_{\ell m}(\theta,\phi) \cdot \mathrm{coef}$$

(inversión del punto) calcular

Veamos algunos casos particulares:

$\underline{l=0}$: $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ (isótropo)

y $\int d\Omega\, Y_{lm}(\theta\phi) = 0$ por esto. Pues

$$\int d\Omega\, Y_{lm}(\theta\phi) = \sqrt{4\pi} \int d\Omega\, Y_{lm}(\theta\phi)\, Y_{00}^{*}(\theta\phi) = \sqrt{4\pi}\, \delta_{m0}\, \delta_{l0}$$

$\underline{l=1}$: $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, c\theta$ (axisimétrico) $\longrightarrow m=0$

$$Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, s\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, s\theta\, e^{-i\phi}$$

Veamos las soluciones en r. Tenemos

$$\frac{r}{R}\frac{d^2}{dr^2}(rR) = l(l+1)$$

$$\Rightarrow \quad R_l(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}$$

Luego la sol. general es

$$\boxed{\varphi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}(\theta\phi)}$$

y hay que imponer cdc en r. Para Dirichlet

$$\varphi(r_1, \theta, \phi) = f(\theta,\phi) = \sum_{l,m} f_{lm}\, Y_{lm}(\theta\phi)$$
$$\varphi(r_2, \theta, \phi) = g(\theta\phi) = \sum_{lm} g_{lm}\, Y_{lm}(\theta\phi)$$

y salen los A_{lm}, B_{lm}.

Veamos los primeros términos del desarrollo.

Si $r_1 \longrightarrow \infty$ y no hay cargas en $\infty \Rightarrow \phi \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow A_{\ell m} = 0 \quad \forall\, l, m$

$$\Rightarrow \varphi(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell m} \frac{B_{\ell m}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\theta\phi)$$

Para $l=0, m=0$ $\varphi \sim \frac{B_{00}}{r}$ es la contribución monopolar!

Si $r_0 = 0$ y $\nabla^2\varphi = 0$ en r_0 (no hay cargas en el origen) $\Rightarrow B_{\ell m} = 0 \quad \forall\, l, m$

$$\Rightarrow \varphi(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell m} A_{\ell m} r^{\ell} Y_{\ell m}(\theta\phi)$$