La solución en ρ depende de β y λ. Veamos primero el caso $\lambda = k^2$ (con k no necesariamente entero).

Dividiendo (3) por ρ^2

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) R = 0$$

y tomando $x = k\rho$

$$\boxed{\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0} \qquad \text{Ec. de Bessel}$$

con sol. $J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$ Func. de Bessel

Si $\nu \neq$ entero , J_ν y $J_{-\nu}$ son sol. independientes

Si $\nu =$ entero $J_{-\nu} = (-1)^\nu J_\nu$ y se define

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}\nu\pi} \qquad \text{Func. de Neumann}$$

$N_\nu(x)$ es sol. de la ec. de Bessel, y J_ν y N_ν son indep.

<u>Prop</u>: comportamiento asintótico

$x \ll 1$:

$$J_\nu(x) \longrightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$$

$$N_\nu(x) \longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\dfrac{2}{x}\right)^\nu & \nu \neq 0 \\ \dfrac{2}{\pi}\left[\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + \gamma\right] & \nu = 0 \end{cases}$$

$\gamma = 0.5772\ldots$ (cte de Euler)

Notar que $\begin{cases} J_0(0) = 1 \\ J_\nu(0) = 0 & \text{si } \nu > 0 \end{cases}$

Del comportamiento para x grande

$x \gg 1$:
$$J_\nu(x) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$N_\nu(x) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

se sigue que J_ν y N_ν tienen infinitas raices en $x>0$, ie. para cada ν $\exists \{x_{\nu n}\}$ tq $J_\nu(x_{\nu n}) = 0$

Para n grande: $\quad x_{\nu n} \approx n\pi + \left(\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$

También $\exists$ ∞ raices $\{y_{\nu n}\}$ tq $J_\nu'(y_{\nu n}) = 0$.

Suelen definirse las funciones de Hankel

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i N_\nu(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} e^{ix}/\sqrt{x}$$
$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i N_\nu(x) \longrightarrow e^{-ix}/\sqrt{x}.$$

útiles para describir ondas cilíndricas entrantes y salientes.

Veamos ahora el <u>caso $\lambda = 0$</u>: Tenemos

$$\rho^2 \frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} = \nu^2 R$$

Si $\begin{cases} \nu = 0 & R = 1, \ln\rho \\ \nu \neq 0 & \rho^\nu, \rho^{-\nu} \end{cases}$

Finalmente, veamos el <u>caso $\lambda = -k^2$</u>. Tomamos cambio de variables $x = ik\rho$ y la ec. queda

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) R = 0$$

y las soluciones son $J_\nu(ik\rho)$.

Definimos

$$I_\nu(k\rho) = i^{-\nu} J_\nu(ik\rho)$$ Funciones de Bessel modificadas (I_ν es real)

y la sol. independiente es

$$K_\nu(k\rho) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1}\left[J_\nu(ik\rho) + i N_\nu(ik\rho)\right]$$

Prop: Notar que

$$I_\nu(k\rho) = \cancel{i^{-\nu}}\left(\frac{\cancel{i}k\rho}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cancel{(-1)^j}}{j!\,\Gamma(j+\nu+1)} \underbrace{\left(\frac{\cancel{i}k\rho}{2}\right)^{2j}}_{i^{2j}=(-1)^j}$$

$\Rightarrow I_\nu(k\rho) > 0$ (no tiene raíces reales en $k\rho > 0$)

Veamos el comportamiento asintótico

$x \ll 1$:
$$I_\nu \longrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^\nu$$

$$K_\nu \longrightarrow \begin{cases} \frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu & \nu \neq 0 \\ -\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right] & \nu = 0 \end{cases}$$

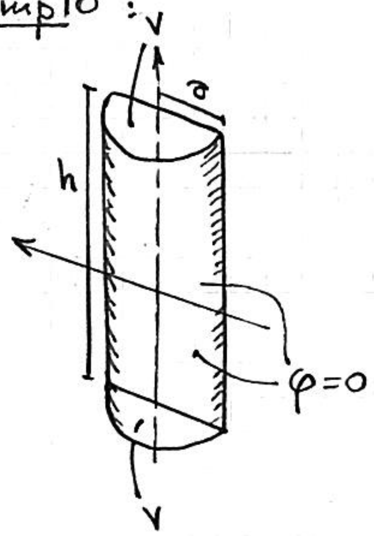
$x \gg 1$:
$$I_\nu \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\, e^{x}$$

$$K_\nu \longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2\pi}}\, e^{-x}$$

En resumen, tenemos diferentes posibilidades:

λ	β	$Q(\phi)$	$Z(z)$	$R(\rho)$
k^2	0	$1, \phi$	e^{kz}, e^{-kz}	$J_\nu(k\rho), N_\nu(k\rho)$
	ν^2	$\cos\nu\phi, \operatorname{sen}\nu\phi$		
0	0	$1, \phi$	$1, z$	$1, \ln\rho$
	ν^2	$\cos\nu\phi, \operatorname{sen}\nu\phi$		$\rho^\nu, \rho^{-\nu}$
$-k^2$	0	$1, \phi$	$\cos kz, \operatorname{sen} kz$	$I_\nu(k\rho), K_\nu(k\rho)$
	ν^2	$\cos\nu\phi, \operatorname{sen}\nu\phi$		

Ejemplo :



Contorno descripto por

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = \pi$$

$$z_1 = -\frac{h}{2}, \quad z_2 = \frac{h}{2}$$

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = a$$

con cdc

$$\varphi(\rho, \phi_1, z) = \varphi(\rho, \phi_2, z) = 0$$

$$\varphi(\rho_1, \phi, z) = \varphi(\rho_2, \phi, z) = 0$$

$$\varphi(\rho, \phi, z_1) = \varphi(\rho, \phi, z_2) = V$$

En ϕ tenemos cdc homogéneas

$$\Rightarrow \quad Q_\nu = A_\nu \cos\nu\phi + B_\nu \operatorname{sen}\nu\phi$$

Además $\quad Q_\nu(\phi = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_\nu = 0$

$$Q_\nu(\phi = \pi) = 0 = B_\nu \operatorname{sen}\nu\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\nu = n} \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

En z tenemos $\varphi(z=\pm h/2)=V$ (no es Sturm-Liouville)
$\Rightarrow$ Tengo dos elecciones posibles. Veamos ρ: tenemos

$$\varphi(\rho=0)=\varphi(\rho=a)=0$$

no cumple las cdc

$$\text{Si}\begin{cases}\lambda=k^2 \longrightarrow J_\nu(k\rho),\ N_\nu(k\rho) \\ \lambda=0 \longrightarrow \rho^\nu,\ \rho^{-\nu} \\ \lambda=-k^2 \longrightarrow I_\nu(k\rho),\ K_\nu(k\rho)\end{cases}$$

No cumplen las cdc.

Tomemos $\lambda=k^2$. Nos queda $R(\rho)=J_\nu(k\rho)$ y debe valer

$$R(a)=J_\nu(k\rho)=0$$

$\Rightarrow$ $ka=x_{\nu n}$ con $n=1,2,\dots$ y $\{x_{\nu n}\}$ raíces de J_ν

$\Rightarrow$ $\boxed{k=\frac{x_{\nu n}}{a}}$ y $\left\{J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}\rho}{a}\right);\ n=1,2\dots\right\}$ es base en $[0,a]$.

Ej: $\nu=0$ $\quad x_{0n}=2.405,\ 5.520,\ 8.654,\dots$

$\nu=1$ $\quad x_{1n}\doteq 3.832,\ 7.016,\dots$

...

Prop: Ortogonalidad $\quad (x_{\nu n}^2-x_{\nu n'}^2)\int_0^a J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}\rho}{a}\right)J_\nu\left(\frac{x_{\nu n'}\rho}{a}\right)\rho\,d\rho=0$

Normalización $\quad \int_0^a J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}\rho}{a}\right)J_\nu\left(\frac{x_{\nu n'}\rho}{a}\right)\rho\,d\rho=\frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})\delta_{nn'}$

De la solución en ϕ y la solución en ρ, de la tabla se sigue que en z tenemos exponenciales.

$$\Rightarrow \varphi(\rho,\phi,z) = \sum_{\substack{m=1\\n=1}}^{\infty} \operatorname{sen}(m\phi)\, J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right)\left[A_{mn}\, e^{\frac{x_{mn}z}{a}} + B_{mn}\, e^{-\frac{x_{mn}z}{a}}\right]$$

De pedir $\varphi(z=\pm h/2)=V$ salen A_{mn} y B_{mn}. Pero notar que el problema es simétrico respecto a $z=0$:

$$\varphi(z)=\varphi(-z)$$

$$\Rightarrow \varphi(\rho,\phi,z) = \sum_{\substack{m=1\\n=1}}^{\infty} C_{mn} \operatorname{sen}(m\phi)\, J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right) \cosh\left(\frac{x_{mn}z}{a}\right)$$

Pidamos ahora $\varphi(z=h/2)=V$

$$V = \sum_{m,n} C_{mn} \cosh\left(\frac{x_{mn}h}{2a}\right) \operatorname{sen}(m\phi)\, J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right)$$

Usando ortogonalidad

$$V\int_0^{\pi}\int_0^{a} \operatorname{sen}(m'\phi)\, J_{m'}\left(\frac{x_{m'n'}\rho}{a}\right)\rho\, d\rho\, d\phi = \sum_{m,n} C_{mn}\cosh\left(\frac{x_{mn}h}{2a}\right) \times$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{a} \underbrace{\operatorname{sen}(m'\phi)\operatorname{sen}(m\phi)\, d\phi}_{\frac{\pi}{2}\delta_{m'm}} \; \underbrace{J_{m'}\left(\frac{x_{m'n'}\rho}{a}\right) J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right)\rho\, d\rho}_{\frac{a^2}{2}\delta_{n'n} J_{m+1}^2(x_{mn})}$$

$$\Rightarrow C_{m'n'} = \frac{V\int_0^{\pi}\int_0^{a} \operatorname{sen} m'\phi\, J_{m'}\left(\frac{x_{m'n'}\rho}{a}\right)\rho\, d\rho\, d\phi}{\cosh\left(\frac{x_{m'n'}h}{2a}\right)\frac{\pi a^2}{4} J_{m'+1}^2(x_{m'n'})} = \frac{8V\int_0^{a} J_{m'}\left(\frac{x_{m'n'}\rho}{a}\right)\rho\, d\rho}{m\pi a^2\cosh\left(\frac{x_{m'n'}h}{2a}\right) J_{m'+1}^2(x_{m'n'})}$$

si m impar
(0 en otro caso)