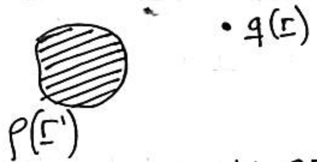
Energía electrostática

Habíamos visto que la fuerza electrostática

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E}$$

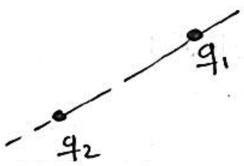
es conservativa pues $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Así, el trabajo para traer una carga desde el ∞ es



$$W = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} q\,\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = q\,\varphi(\mathbf{r})$$

y es independiente del camino.

Luego, definimos una energía potencial de interacción entre las cargas de una distribución

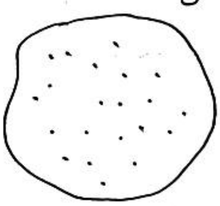


$$U = \frac{q_1\,q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

o bien, simetrizando

$$U = \frac{1}{2}\left[q_1\,\varphi_2(\mathbf{r}_1) + q_2\,\varphi_1(\mathbf{r}_2)\right]$$

Para N cargas



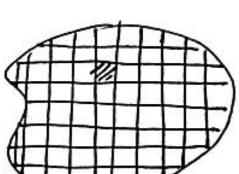
$$U = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i} \frac{q_i\,q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

o en forma simétrica

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} \frac{q_i\,q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2}\sum q_i\,\varphi(\mathbf{r}_i)$$

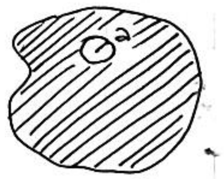
potencial debido a las N-1 cargas restantes

y en el caso continuo



$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,dv$$

Estrictamente hablando la integral debería excluir el bloque ▨. Pero si $\rho(\underline{r})$ se comporta bien (toma valores finitos en todo el espacio) la contribución de ▨ no influye en el resultado, pues



$\rho(\underline{r})$

$$\varphi = \varphi' + \underbrace{\int_{\text{esfera}} \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, dV'}_{\approx\, \rho(\underline{r})\, 4\pi a^2}$$

y para $a \to 0$ $\varphi = \varphi'$ salvo que ρ diverja mas rápido que $1/a^2$.

Podemos escribir U en término de los campos, en lugar de en términos de las cargas y los potenciales.

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV = -\frac{1}{8\pi}\int \left(\nabla^2\varphi\right)\varphi\, dV$$

y usando $\quad (\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}\varphi)\varphi = \underline{\nabla}\cdot(\varphi\underline{\nabla}\varphi) - \nabla\varphi\nabla\varphi$

$$\Rightarrow U = -\frac{1}{8\pi}\int \underline{\nabla}\cdot(\varphi\underline{\nabla}\varphi)\, dV + \frac{1}{8\pi}\int |\nabla\varphi|^2 dV =$$

$$= \cancel{-\frac{1}{8\pi}\int_{S(V)} \underset{1/r}{\varphi}\, \underset{1/r^2}{\underline{E}}\cdot \underset{r^2}{d\underline{S}}} + \frac{1}{8\pi}\int_V |\underline{E}|^2 dV$$

y $\quad \boxed{U = \frac{1}{8\pi}\int |\underline{E}|^2 dV}$

y se puede definir una densidad de energía $u = \frac{|\underline{E}|^2}{8\pi}$, pero se debe tener cuidado en volumenes finitos con las c.dc. y la integral sobre $S(V)$.

Veamos algunos ejemplos:

Casos particulares

1)

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\varphi \, dV$$

donde $\begin{cases} \rho = \rho_1 + \rho_2 \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}\int \Big(\underbrace{\rho_1\varphi_1 + \rho_2\varphi_2}_{\text{autoenergías}} + \underbrace{\rho_1\varphi_2 + \rho_2\varphi_1}_{\text{energía de interacción}} \Big) dv$$

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2}\int \rho_1\varphi_1 \, dv \\ U_2 &= \frac{1}{2}\int \rho_2\varphi_2 \, dV \end{aligned}\right\} \text{ autoenergías (deformación)} \left\{ \begin{aligned} &U_1, U_2 > 0 \\ &\text{mientras que} \\ &U_1 U_2 \text{ puede ser} \\ &\text{negativa} \end{aligned}\right.$$

$$U_{12} = \frac{1}{2}\int \left(\rho_1\varphi_2 + \rho_2\varphi_1\right) dV = \int \rho_1\varphi_2 \, dV = \int \rho_2\varphi_1 \, dV$$

energía de interacción

Pues

$$\int \rho_1\varphi_2 \, dV = \int \frac{\rho_1(\mathbf{r})\,\rho_2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \, dv\,dv' = \int \rho_2\varphi_1 \, dv$$

2) Sistema de conductores

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\varphi \, dV = \frac{1}{2}\sum_i \int_{S(V_i)} \sigma_i \varphi \, dS_i = \frac{1}{2}\sum_i V_i Q_i$$

Pero notar que no puedo prescribir Q_i y V_i al mismo tiempo. Como las ec. de los campos en el vacío son lineales, podemos escribir

$$Q_i = C_{ij} V_j$$

donde los C_{ij} dependen de la geometría

$C_{ii} \longrightarrow$ coeficientes de capacidad

$C_{ij} \longrightarrow$ coeficientes de inducción electrostática $(i \neq j)$

con $C_{ii} > 0$, $C_{ij} < 0$ $(i \neq j)$ (pues las cargas inducidas son de signo contrario).

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{2} C_{ij} V_i V_j$$

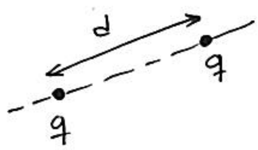
Además, notar que
$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial Q_i} = V_i \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial V_i} = Q_i \end{array} \right.$$

y como U es función de estado, sus derivadas cruzadas deben ser iguales

$$\frac{\partial^2 U}{\partial V_i \partial V_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial V_i} = C_{ji} = \frac{\partial^2 U}{\partial V_j \partial V_i} = C_{ij}$$

$$\Longrightarrow \quad C_{ij} = C_{ji}$$

3) Cargas puntuales



$$U_{12} = -\frac{q^2}{d} < 0$$

Notar que el cálculo del trabajo para traer una carga del ∞ no tiene en cuenta las autoenergías, mientras que

$$U = \int \frac{1}{2} \rho \varphi \, dV = \frac{1}{8\pi} \int |E|^2 \, dV > 0$$

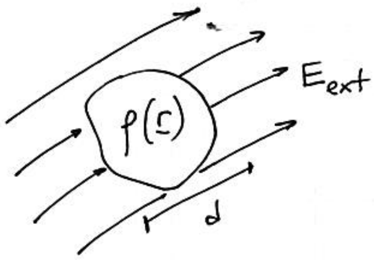
porque considera autoenergías. Para una esfera con ρ uniforme

$\rho = \frac{3Q}{4\pi a^2}$

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV = \frac{3Q^2}{5a} \xrightarrow[a\to 0]{} \infty$$

pero si la esfera no se deforma es una constante.

<u>Energia de interacción de una distribución con un campo externo</u>



$$U_{int} = \int \rho(\underline{r})\, \varphi_{ext}(\underline{r})\, dV$$

Si la distribución está concentrada en una región con long. característica d con d ≪ long. característica de variación de φ

$\Rightarrow$ desarrollamos φ alrededor de $\underline{r}_0$

$$U_{int} = \int dV \rho(\underline{r}) \left[\varphi(\underline{r}_0) + (r_i - r_{0i}) \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r_i}\right|_{\underline{r}_0} + \frac{1}{2}(r_i - r_{0i})(r_j - r_{0j}) \left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial r_i \partial r_j}\right|_{\underline{r}_0} + \ldots \right]$$

$$= \varphi(\underline{r}_0) \int \rho\, dV + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r_i}\right|_{\underline{r}_0} \int \rho(\underline{r})(r_i - r_{0i})\, dV +$$

$$+ \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial r_i \partial r_j}\right|_{\underline{r}_0} \int \rho(\underline{r})(r_i - r_{0i})(r_j - r_{0j})\, dV .$$

y U_{int} pueda expresada en términos de los multipolos respecto de $\underline{r}_0$.

$$\Rightarrow U_{int} = Q\varphi(\underline{r}_0) + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r_i}\right|_{\underline{r}_0} P_i + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r_i \partial r_j}\right|_{\underline{r}_0} C_{ij} + \ldots$$

$$= Q\varphi(\underline{r}_0) - \underline{P}\cdot\underline{E}(\underline{r}_0) - \frac{1}{2} \left.\frac{\partial E_j}{\partial r_i}\right|_{\underline{r}_0} C_{ij} + \ldots$$

pues $\frac{\partial\varphi}{\partial r_i} = -E_i$. Además

$$Q_{ij} = 3C_{ij} - C_{\ell\ell}\,\delta_{ij} \Rightarrow C_{ij} = \frac{Q_{ij}}{3} + \delta_{ij}\frac{C_{\ell\ell}}{3}$$

y luego $\displaystyle \frac{1}{2}\left.\frac{\partial E_j}{\partial r_i}\right|_{\underline{r}_0} C_{ij} = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial E_j}{\partial r_i}\right|_{\underline{r}_0}\left(\frac{Q_{ij}}{3} + \delta_{ij}\frac{C_{\ell\ell}}{3}\right) =$

$$= \frac{1}{6}\left.\frac{\partial E_j}{\partial r_i}\right|_{\underline{r}_0} Q_{ij} + \frac{1}{6}\cancel{\left.\frac{\partial E_i}{\partial r_i}\right|_{\underline{r}_0}} C_{\ell\ell}$$

$$\Rightarrow U_{int} = Q\varphi(\underline{r}_0) - \underline{P}\cdot\underline{E}(\underline{r}_0) - \frac{1}{6}\left.\partial_i E_j\right|_{\underline{r}_0} Q_{ij} + \dots$$

y Q interactúa con φ

$\underline{P}$ " " $\underline{E}$

$\underline{\underline{Q}}$ " " $\underline{\nabla}\underline{E}$

Por ejemplo, si introduzco $\rho(\underline{r})$ en un $\underline{E}$ uniforme interactúa solo si $\underline{P} \neq 0$.

Energía electrostática en medios materiales

La definimos como $-W$ para armar la configuración. Notar que ahora no hay que contar solo el trabajo para traer cargas del ∞, sino también el trabajo asociado a polarizar el medio para cada configuración.

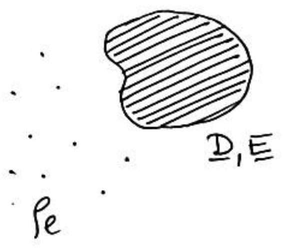
U es función de estado termodinámica

$$\Delta U = Q - W = Q + W_{ext}$$

y

$$\delta U = T\delta S - \delta W = T\delta S + \delta W_{ext}$$

consideremos solo la energía electrostática de una configuración



e incrementemos $\rho_e \longrightarrow \rho_e + \delta\rho_e$

$$\Rightarrow \quad \delta U = \int \delta\rho_e \, \varphi \, dV$$

Pero $\quad 4\pi \rho_e = \underline{\nabla} \cdot \underline{D}$

$$\Rightarrow \quad 4\pi \, \delta\rho_e = \underline{\nabla} \cdot (\delta \underline{D})$$

$$\Rightarrow \delta U = \int dV \, \frac{1}{4\pi} \left(\underline{\nabla} \cdot \delta \underline{D} \right) \varphi =$$

$$= \cancel{\frac{1}{4\pi} \int \nabla \cdot \left(\delta \underline{D} \varphi \right) dV}^{\;\xrightarrow[r\to\infty]{} 0} - \frac{1}{4\pi} \int \delta \underline{D} \cdot \underline{\nabla} \varphi \, dV$$

$$\Rightarrow \quad \delta U = \frac{1}{4\pi} \int \underline{E} \cdot \delta \underline{D} \, dV$$

Formalmente, ahora podemos llevar $\underline{D}$ de 0 a su valor y obtener

$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi} \int dV \int_0^{D} \underline{E} \cdot \delta \underline{D}}$$

Notar que $\underline{E} = \underline{E}(\underline{D})$

tiene en cuenta la historia del medio (histéresis)

Si el medio es lineal $\quad \underline{D} = \underline{\underline{\varepsilon}} \, \underline{E}$

y $\quad \underline{E} \cdot \delta \underline{D} = E_i \, \varepsilon_{ij} \, \delta E_j = \delta (\underline{E} \cdot \underline{D})$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{1}{8\pi} \int \underline{E} \cdot \underline{D} \, dV}$$