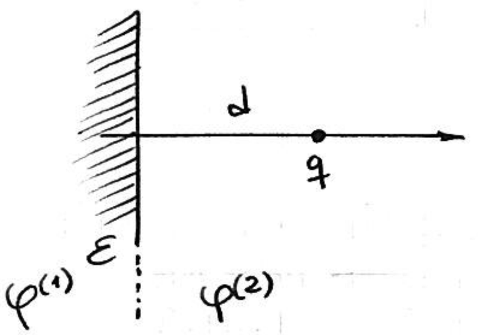
Ejemplo:



Tenemos que considerar la polarización del medio. Usando imágenes, buscamos

$$\varphi^{(2)} = \frac{q}{|\underline{r} - d\hat{z}|} + \varphi'$$

tq $\begin{cases} \nabla^2 \varphi' = 0 & \text{en } z > 0 \\ \varphi^{(2)} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0 & \\ \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} & \text{en } z = 0 \end{cases}$

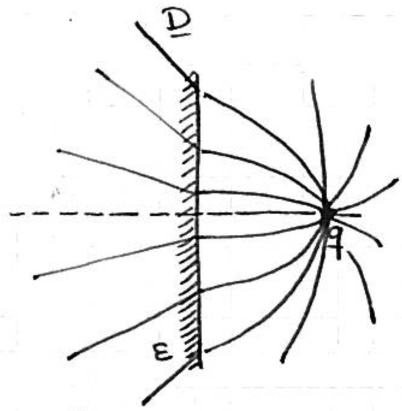
Además $\left(\underline{D}^{(2)} - \underline{D}^{(1)}\right) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma_\ell = 0 \qquad (1)$

Es decir $\begin{cases} \varphi^{(1)}\Big|_{z=0} = \dfrac{q}{|\underline{r} - d\hat{z}|}\Big|_{z=0} + \varphi'(z=0) = \varphi^{(2)}\Big|_{z=0} \\ \left[-\dfrac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial z} + \varepsilon \dfrac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z}\right]_{z=0} = 0 \end{cases}$

La solución en (1) debe ser solución de Laplace.

Tomemos

$$\begin{cases} \varphi^{(1)} = \dfrac{q_{im}'}{|\underline{r} - d\hat{z}|} \\ \varphi^{(2)} = \dfrac{q}{|\underline{r} - d\hat{z}|} + \dfrac{q_{im}}{|\underline{r} - z_{im}\hat{z}|} \end{cases}$$



De las cdc.

$$\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} + \frac{q_{im}}{\sqrt{x^2+y^2+z_{im}^2}} = \frac{q_{im}'}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}}$$

$$-\frac{q\,d}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} - \frac{q_{im} z_{im}}{(x^2+y^2+z_{im}^2)^{3/2}} = -\frac{\varepsilon\, q_{im}'\, d}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

Tomamos $\boxed{z_{im} = -d}$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} q + q_{im} = q_{im}' \\ -q + q_{im} = -\varepsilon\, q_{im}' \end{cases}$

luego $q_{im}' = \dfrac{2q}{1+\varepsilon}$

$q_{im} = \dfrac{q(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon}$

y

$$\varphi(\underline{r}) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+\varepsilon}\dfrac{q}{|\underline{r}-d\hat{z}|} & z<0 \\ \dfrac{q}{|\underline{r}-d\hat{z}|} + \dfrac{1}{1+\varepsilon}\dfrac{q(1-\varepsilon)}{|\underline{r}+d\hat{z}|} & z>0 \end{cases}$$

debido a la polarización del dieléctrico.

$\underline{P}$ (en realidad, σ_p) puede obtenerse de $\left(E^{(2)} - E^{(1)}\right)\cdot\hat{n} = 4\pi\sigma_p$

con $E^{(2)} = -\nabla\varphi^{(2)}$ y $E^{(1)} = -\nabla\varphi^{(1)}$.

Ahora podemos calcular U de la configuración usando

$$\delta U = \int \delta\rho_e\, \varphi\, dV$$

consideremos la carga como αq y llevemos α de 0 a 1:

$$\varphi^{(2)}(\underline{r}) = \frac{\alpha q}{|\underline{r}-d\hat{z}|} + \frac{\alpha q(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)|\underline{r}+d\hat{z}|} \quad \text{y} \quad \delta\rho_e = q\,\delta\alpha\,\delta(\underline{r}-d\hat{z})$$

Nos interesa solo la energía de interacción, es decir, αq con el campo eléctrico generado por el dieléctrico

$$U = \int_0^1 q\,d\alpha\,\frac{\alpha q(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)2d} = \frac{q^2}{4d}\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} < 0$$

y el dieléctrico atrae a la carga.

Principio de trabajos virtuales

Consideremos una distribución de cargas y desplacemos las cargas en $\Delta\underline{r}_i$

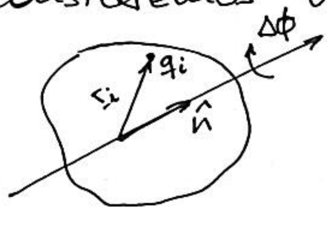
$$\Delta U = U(q_i, \underline{r}+\Delta\underline{r}_i) - U(q_i, \underline{r}_i) =$$
$$= -\sum_i \underline{F}_i \cdot \Delta\underline{r}_i = -F_i^{(\alpha)}\Delta r_i^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1,2,3)$$

luego

$$F_i^{(\alpha)} = -\left.\frac{\partial U}{\partial r_i^{(\alpha)}}\right|_q = -\lim_{\Delta r_i^{(\alpha)}\to 0}\frac{U'-U}{\Delta r_i^{(\alpha)}}$$

En general $\boxed{\underline{F}_i = -\underline{\nabla}_i U\big|_q}$

Consideremos una rotación rígida



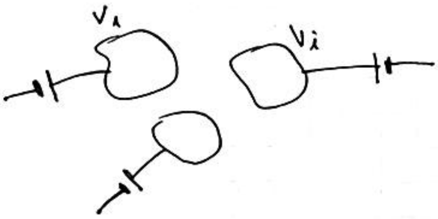
$$\Delta r_i = \Delta\phi\,\hat{n}\times\underline{r}_i$$

y $\quad \frac{U'-U}{\Delta\phi} = -\underline{F}_i\cdot\left(\cancel{\Delta\phi}\,\hat{n}\times\underline{r}_i\right)\frac{1}{\cancel{\Delta\phi}} = -\hat{n}\cdot\left(\underline{r}_i\times\underline{F}_i\right) = -\hat{n}\cdot\underline{N}$

Torque

Ppio de trabajos virtuales a potencial constante

Cuando se prescriben los potenciales (en lugar de las cargas) al desplazar los conductores necesitamos baterías para mantener V cte. Tomemos:

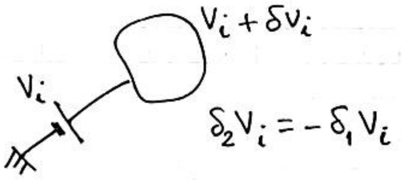


Desconectamos las fuentes y los mantenemos aislados para desplazarlos. Luego conectamos las baterías para volver a V_i en cada conductor.

Al desconectar las fuentes $\quad \delta_1 U = \frac{1}{2}\sum_i\left(\cancel{\delta_1 q_i V_i} + q_i\,\delta_1 V_i\right)$

Al conectarlas

$$\delta_2 U = W_{\text{batería}} = \sum \delta_2 q_i\, V_i$$



(las baterías están a V_i constante)

$$\Rightarrow \delta_2 U = \sum_i \delta_2 q_i\, V_i = \sum_i q_i \delta_2 V_i = -\sum q_i \delta_1 V$$

$$\Rightarrow \quad \delta U = \underbrace{\delta_1 U}_{\text{sist. aislado}} + \underbrace{\delta_2 U}_{\text{variación de U de las baterías}} = -\frac{1}{2}\sum_i q_i\,\delta_1 V_i = -\delta_1 U = +\underline{F}_i\cdot\delta\underline{r}_i$$

$\rightarrow$ trabajo hecho por las baterías para restaurar V_i

$$\Rightarrow \quad \boxed{\underline{F}_i = \nabla_i U\Big|_V}$$

Otra forma de verlo es usando que U es func. de estado. Tenemos $\quad \frac{\partial U}{\partial q_i} = V_i \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial r_i^{(\alpha)}} = -F_i^{(\alpha)}$

$$\Rightarrow \quad dU = V_i\, dq_i - \underline{F}_i\cdot d\underline{r}_i$$

para el sist. cerrado (cargas constantes). Si quiero pasar a variables independientes V_i, r_i tomamos potencial termodinámico $\tilde{U}$:

$$\tilde{U} = U - q_i V_i \longleftarrow \text{transf. de Legendre}$$

$$\Rightarrow d\tilde{U} = dU - q_i dV_i - V_i dq_i = -q_i dV_i - \underline{F}_i \cdot d\underline{r}_i$$

$$\Rightarrow F_i = -\nabla_i \tilde{U}\Big|_V = \nabla_i U\Big|_V$$

Termodinámica de dieléctricos

La energía interna está dada por

$$U = Q - W = Q + W_{ext}$$

y

$$\delta U = T\delta S + \frac{1}{4\pi}\int \underline{E} \cdot \delta\underline{D}\, dV$$

Esta expresión es útil para procesos en los que la entropía está prescripta. Si trabajamos con $\underline{D}$ y T como variables termodinámicas independientes, introducimos la energía libre de Helmholtz usando transf. de Legendre

$$F = U - TS$$

$$\Rightarrow \delta F = -S\delta T + \frac{1}{4\pi}\int \underline{E} \cdot \delta\underline{D}\, dV$$

Si queremos $\underline{E}$ como variable termodinámica

$$\tilde{U} = U - \frac{1}{4\pi}\int \underline{E} \cdot \underline{D}\, dV \longleftarrow \text{es equivalente al ejemplo anterior}$$

$$\tilde{F} = U - \frac{1}{4\pi}\int \underline{E} \cdot \underline{D}\, dV$$

$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}: \text{respecto a los potenciales} \\ U: \text{respecto a las cargas} \end{array} \right.$

y $$\delta\tilde{F} = \delta F - \frac{1}{4\pi}\int \left(\underline{E} \cdot \delta\underline{D} + \underline{D} \cdot \delta\underline{E}\right) dV = -S\delta T - \frac{1}{4\pi}\int \delta\underline{E} \cdot \underline{D}\, dV$$

$$\delta\tilde{U} = T\delta S - \frac{1}{4\pi}\int \delta\underline{E} \cdot \underline{D}\, dV$$

Notar que dados los potenciales tenemos (usando $\underline{D} = \epsilon \underline{E}$)

$$S = -\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\underline{D}} = \left.\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)_{\underline{D}} \int \frac{D^2}{8\pi\epsilon^2}\, dV + S_0(T) =$$

$$= \left.\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)_{\underline{D}} \int \frac{E^2}{8\pi}\, dV + S_0(T)$$

Recordar que en una transf. isotérmica $-\Delta F$ es el maximo trabajo que puede hacer el sistema

$$\frac{\Delta Q}{T} \leq \Delta S \qquad y \qquad W \leq -\Delta U + T\Delta S$$

$$\Rightarrow \boxed{W \leq -\Delta F}$$

Se sigue que un sist. aislado a $T = cte$ evoluciona al minimo de F.