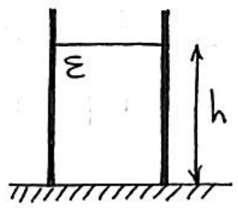
Ejemplo: capacitor con dieléctrico líquido



ΔV o $\underline{E}$ dato

Tenemos energía potencial de la columna (gravitatoria)

$$U_g = \int_0^h \rho g h \, dh = \rho g \frac{h^2}{2} \qquad (\times \text{ u. de area})$$

Para la energía electrostática, queremos la variación por introducir el dieléctrico.

Veamos que

$$U_e = \frac{1}{8\pi} \int \left(\underline{E} \cdot \underline{D} - \underline{E}_0 \cdot \underline{D}_0 \right) dV =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int \left[\left(\underline{E} \cdot \underline{D}_0 - \underline{D} \cdot \underline{E}_0 \right) + \underbrace{\left(\underline{E} + \underline{E}_0 \right)}_{-\underline{\nabla}\Phi} \cdot \left(\underline{D} - \underline{D}_0 \right) \right] dV$$

pues $\underline{\nabla} \times \left(\underline{E} + \underline{E}_0 \right) = 0$

$$\text{Y} \quad \int -\underline{\nabla}\Phi \cdot \left(\underline{D} - \underline{D}_0 \right) dV = - \int \nabla \cdot \cancel{\left[\Phi \left(\underline{D} - \underline{D}_0 \right) \right]} \, dV + \int \cancel{\Phi \, \underline{\nabla} \cdot \left(\underline{D} - \underline{D}_0 \right)} \, dV$$

$\xrightarrow{\infty} 0$ pues ρ_L no cambia

puede obtenerse de
$$d\tilde{F} = -\frac{1}{4\pi}\int \delta \underline{E}\cdot\underline{D}\,dV \quad \text{variando } \epsilon' \text{ de } 1 \text{ a } \epsilon$$
$$= -\frac{1}{8\pi}\int (\epsilon - 1) E^2 dV$$

$$\Rightarrow \quad U_e = \frac{1}{8\pi}\int \left(\underline{E}\cdot\underline{D}_0 - \underline{D}\cdot\underline{E}_0\right) dV \;{}^{*}$$

solo sobre el volumen del medio, pues afuera $\underline{D}=\underline{E}$

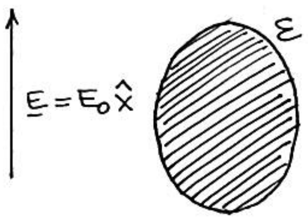
$$\Rightarrow \quad \boxed{U_e = -\frac{1}{8\pi}\int_{\text{medio}} (\epsilon - 1)\,\underline{E}\cdot\underline{E}_0\, dV} = -\frac{1}{2}\int_{\text{medio}} \underline{P}\cdot\underline{E}_0\, dV$$

es la energía de interacción

luego $\quad \mathcal{U}_e = -\frac{1}{8\pi}(\epsilon - 1)E^2 h \qquad$ (x u. de area)

y $$\delta\mathcal{F} = 0 = \rho g h\,\delta h - \frac{1}{8\pi}(\epsilon - 1)E^2\,\delta h =$$
$$= \delta h\left[\rho g h - \frac{1}{8\pi}(\epsilon - 1)E^2\right]$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{E^2}{8\pi\rho g}(\epsilon - 1)}$$

Ejemplo: Consideremos una gota de dieléctrico líquido en un campo $\underline{E}$ uniforme ($\underline{E}$ débil). ¿Qué forma tiene?



El campo $\underline{E}^{(i)}$ dentro del medio será uniforme. Por simetría, la gota será un elipsoide y el campo satisface (Landau & Lifshitz):

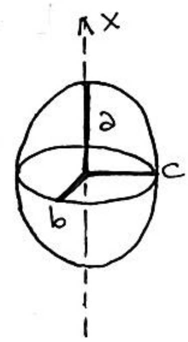
$$(1 - n_x)\,E_x^{(i)} + n_x D_x^{(i)} = E_0$$

(pues para $\varepsilon = 1$ tenemos $E_x^{(i)} = E_0$). El coef. n_x (coef. de depolarización) es geométrico y vale

$$n_x = \frac{1}{3} - \frac{2}{15}e^2 \qquad \text{para } e \ll 1$$

con la excentricidad $\quad e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$

y $\boxed{b = c}$ x simetría de revolución.



Luego, para un medio lineal, isótropo y homogeneo

$$E_x^{(i)} = \frac{E_0}{1 + n_x(\epsilon - 1)}$$

y

$$U_e = -\frac{(\epsilon-1)E_0^2 V}{8\pi\left[1 + n_x(\epsilon-1)\right]}$$

donde V es el volumen (constante)

Luego $F = \gamma A - \dfrac{(\epsilon-1)E_0^2 V}{8\pi\left[1 + n_x(\epsilon-1)\right]}$

tensión superficial

Podemos aproximar

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{15}e^2\right)(\epsilon - 1)} = \frac{1}{\frac{\epsilon+2}{3} - \frac{2}{15}(\epsilon-1)e^2} = \frac{3}{\epsilon+2}\left(\frac{1}{1 - \frac{2}{5}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)e^2}\right) \approx$$

$$\approx \frac{3}{\epsilon+2}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}e^2\right)$$

Además

$$V = \frac{4}{3}\pi a b^2 \equiv \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \text{(radio de la esfera con igual V)}$$

y al orden mas bajo en e

$$a \approx R\left(1 + e^2/3\right) \qquad \text{pues} \qquad a = R\left(1 - e^2\right)^{-1/3}$$

$$b \approx R\left(1 - e^2/6\right) \qquad \text{pues} \qquad b = R\left(1 - e^2\right)^{1/6}$$

y $A \approx 4\pi R^2 + \dfrac{8\pi}{45}e^4 R^2$

$$\Rightarrow \quad F = F_0 + \gamma\frac{8\pi}{45}e^4R^2 - \frac{6R^3}{2\cdot 15}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 E_0^2 e^2$$

y $\delta F = 0 = \delta e\left[4\gamma\dfrac{8\pi R^2}{45}e^3 - \dfrac{6R^3}{15}\left(\dfrac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 E_0^2\, e\right]$

$$\Rightarrow \quad \boxed{e^2 = \frac{9}{16\pi}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 \frac{RE_0^2}{\gamma}}$$

Fenómenos dependientes del tiempo

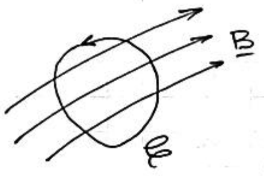
Ley de inducción de Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$

Flujo magnético

fem

Ley de Lenz



$$\mathcal{E} = \oint_{\ell} \underline{E}\cdot d\underline{\ell} = -\frac{1}{c}\int_{S(\ell)} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\cdot d\underline{S}$$

si el circuito ℓ está fijo

Maxwell lo generaliza como una relación entre $\underline{E}$ y $\underline{B}$

$$\oint_{\ell} \underline{E}\cdot d\underline{\ell} = \int_{S(\ell)} (\underline{\nabla}\times\underline{E})\cdot d\underline{S} = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\cdot d\underline{S}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}}$$

Ley de Ampere:

Habíamos visto que $\underline{\nabla}\times\underline{H} = \frac{4\pi}{c}\underline{J}_\ell$ viola la continuidad de carga. Maxwell la generaliza como

$$\boxed{\underline{\nabla}\times\underline{H} = \frac{4\pi}{c}\underline{J}_\ell + \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{D}}{\partial t}}$$

Ecuaciones de Maxwell

$$\begin{cases} \underline{\nabla}\cdot\underline{D} = 4\pi\rho_\ell \\ \underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{H} = \frac{4\pi}{c}\underline{J}_\ell + \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \quad \leftarrow \text{con fuentes (inhomogéneas)}$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad \leftarrow \text{sin fuentes (homogéneas)}$$

y en vacío

$$\begin{cases} \underline{\nabla}\cdot\underline{E} = 4\pi\rho \\ \underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \qquad (2)$$

Potenciales electromagnéticos

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0 \Rightarrow \underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A} \qquad \text{(potencial vector)}$$

Reemplazando en (2)

$$\underline{\nabla}\times\underline{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}\times\underline{A}=0$$

$$\underline{\nabla}\times\left(\underline{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\underline{A}}{\partial t}\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad E+\frac{1}{c}\frac{\partial\underline{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi\quad\Rightarrow\quad\boxed{E=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\underline{A}}{\partial t}}$$

Podemos escribir Maxwell en términos de $\underline{A},\varphi$.

De $\underline{\nabla}\cdot\underline{E}=4\pi\rho\quad\Rightarrow\quad\underline{\nabla}\cdot\left(-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\underline{A}}{\partial t}\right)=4\pi\rho$

y de (1) $\quad\Longrightarrow\quad\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})=\frac{4\pi}{c}\underline{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\underline{A}}{\partial t}\right)$

Luego

$$\begin{cases}-\nabla^2\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}\cdot\underline{A}=4\pi\rho\\ \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A})-\nabla^2\underline{A}=\frac{4\pi}{c}\underline{J}-\underline{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{A}}{\partial t^2}\end{cases}$$

y tenemos libertad de elección de $\underline{\nabla}\cdot\underline{A}$.

<u>Gauge de Lorentz</u>: $\quad\boxed{\nabla\cdot A=-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}}$

Queda

$$\begin{cases}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\nabla^2\varphi=4\pi\rho\\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{A}}{\partial t^2}-\nabla^2\underline{A}=\frac{4\pi}{c}\underline{J}\end{cases}$$

Notar que dados $\underline{A},\varphi$ que satisfacen el gauge, tengo libertad

$$A'=A+\nabla\chi$$
$$\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

con χ arbitraria

pues

$$\begin{cases}\underline{\nabla}\times\underline{A}=\underline{\nabla}\times\underline{A}'=\underline{B}\\ -\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\underline{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi'-\frac{1}{c}\frac{\partial\underline{A}'}{\partial t}=\underline{E}\end{cases}$$

Gauge de Coulomb: $\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{A}=0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2\varphi = -4\pi\rho \\ -\nabla^2\underline{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} = \dfrac{4\pi}{c}\underline{J} - \underline{\nabla}\left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \end{cases} \qquad (1)$$

Notar que en este gauge φ es el potencial electrostático

$$\varphi(\underline{r},t) = \int \frac{\rho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,dV'$$

En la segunda ecuación descomponemos $\underline{J} = \underline{J}_\ell + \underline{J}_t$

$$\text{con} \begin{cases} \underline{\nabla}\times\underline{J}_\ell = 0 & \text{(irrotacional)} \\ \underline{\nabla}\cdot\underline{J}_t = 0 & \text{(solenoidal)} \end{cases}$$

Luego

$$\underline{J}_\ell = -\frac{1}{4\pi}\underline{\nabla}\left(\int \frac{\underline{\nabla}'\cdot \overset{\equiv J(\underline{r}')}{\underline{J}'}}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,dV'\right)$$

$$\underline{J}_t = -\frac{1}{4\pi}\underline{\nabla}\times\left(\int \frac{\underline{\nabla}\times\underline{J}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,dV'\right)$$

De la ec. de continuidad

$$\frac{4\pi}{c}\underline{J}_\ell = \frac{1}{c}\underline{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,dV'\right) = \frac{1}{c}\underline{\nabla}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

$\Rightarrow$ (1) queda

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\underline{A} = \frac{4\pi}{c}\underline{J}_t} + \cancel{\frac{4\pi}{c}\underline{J}_\ell - \underline{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}$$

y recuperamos una ec. de ondas con fuentes para $\underline{A}$, donde ahora la fuente es solo la parte de la densidad de corriente que no produce acumulación de cargas.

Ahora tenemos ec. de la forma $\nabla^2\psi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\underline{r},t)$

Necesitamos conocer las fuentes y cdc., pero ahora el volumen es V + su evolución en el tiempo. Por ejemplo,

$$\begin{cases} \psi(\underline{r}) & \forall\,\underline{r} \text{ en } t_0, t_1 \\ \psi)_S & \forall\, t \end{cases}$$