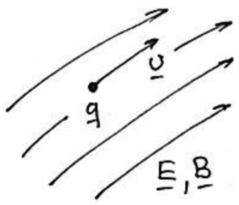
Balance de energía para un sist. de cargas



Para una carga puntual, tenemos la fuerza de Lorentz (experimental).

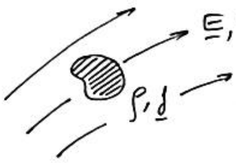
$$\underline{F} = q\underline{E} + \frac{q}{c}\,\underline{v} \times \underline{B}$$

y para una dist. en volumen $\underline{F} = \rho \underline{E} + \frac{\underline{j}}{c} \times \underline{B}$

Veamos el trabajo que hacen los campos electromagnéticos sobre un sist. de cargas x unidad de tiempo (potencia entregada)

$$\frac{dW}{dt} = \left(q\underline{E} + \frac{q}{c}\underline{v} \times \underline{B} \right) \cdot \underbrace{\frac{d\underline{r}}{dt}}_{= \underline{v}} = q\,\underline{v} \cdot \underline{E}$$

y en un medio continuo $\quad \dfrac{dW}{dt} = \int_V \underline{j}\cdot\underline{E}\, dV$



Pero de Ampère $\quad \underline{\nabla}\times\underline{H} = \dfrac{4\pi}{c}\underline{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \underline{D}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} = \int_V \left(\frac{c}{4\pi}\underline{\nabla}\times\underline{H} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \underline{D}}{\partial t}\right)\cdot\underline{E}\, dV$$

Además

$$(\underline{\nabla}\times\underline{H})\cdot\underline{E} = \varepsilon_{ijk}(\partial_j H_k)E_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j(H_k E_i) - \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{= -\varepsilon_{kji}}(\partial_j E_i)H_k =$$

$$= -\underline{\nabla}\cdot(\underline{E}\times\underline{H}) + (\underline{\nabla}\times\underline{E})\cdot\underline{H}$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} = \int_V -\frac{c}{4\pi}\nabla\cdot(\underline{E}\times\underline{H}) - \frac{1}{4\pi}\int_V \Big(\underbrace{\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\cdot\underline{H}}_{= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\underline{B}\cdot\underline{H})} + \underbrace{\frac{\partial \underline{D}}{\partial t}\cdot\underline{E}}_{= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\underline{D}\cdot\underline{E})}\Big)dV \qquad (1)$$

si el medio es lineal

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} = -\int_{S(V)} \frac{c}{4\pi}(\underline{E}\times\underline{H})\cdot d\underline{A} - \frac{d}{dt}\int_V \underbrace{\frac{1}{8\pi}\left(\underline{B}\cdot\underline{H} + \underline{E}\cdot\underline{D}\right)}_{= u}dV \qquad (2)$$

u (densidad de energ. electromagnética)

W puede convertirse en energía mecánica o calor. Si no hay disipación el W externo se convertirá en U_{mec} y

$$\boxed{\frac{dU_{mec}}{dt} = -\int_{S(V)} \underline{S}\cdot d\underline{A} - \frac{dU_{em}}{dt}}$$

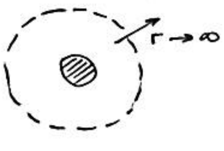
con $\quad \boxed{U_{em} = \dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_V (\underline{B}\cdot\underline{H} + \underline{D}\cdot\underline{E})\, dV}$

$\boxed{\underline{S} = \dfrac{c}{4\pi}\underline{E}\times\underline{H}} \longleftarrow$ Vector de Poynting (densidad de flujo)

En forma diferencial: (o de conservación) $\quad \boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot\underline{S} = -\underline{j}\cdot\underline{E}}$ $\quad$ de (1) y (2)

Notar que para $r \to \infty$ $\quad \displaystyle\int_{S(V)} \underline{S}\cdot d\underline{A} = \int \underbrace{\hat{r}\cdot(\underline{E}\times\underline{H})}_{\sim 1/r^2} r^2 d\Omega \not\to 0$

para los campos de radiación ($\underline{E} \sim \underline{H} \sim 1/r$)



para el ej. del dipolo $\left\{ \begin{array}{l} \underline{E} \text{ va en } \hat{\theta} \\ \underline{B} \text{ va en } \hat{\varphi} \end{array} \right\}$ $\underline{E}\times\underline{B}$ va en $\hat{r}$

Si los campos se generan en t_0, para esferas con radio $R > c(t-t_0)$ $\qquad \frac{d}{dt}\left(U_{mec} + U_{em}\right) = 0$ (si no hay disipación)

Si no, S describe el flujo de energía por radiación, llevado por los campos.

<u>Balance de impulso</u>

Ahora
$$\frac{d\underline{P}_{mec}}{dt} = \underline{F} = \int \left(\rho \underline{E} + \frac{\underline{j}}{c} \times \underline{B}\right) dV$$

Escribiendo todo en término de los campos

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \underline{\nabla} \cdot \underline{E} \qquad , \quad \underline{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \underline{B} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \qquad \text{(vacío)}$$

$$\Rightarrow \underline{F} = \frac{1}{4\pi}\int_V \left[\underline{E}(\underline{\nabla}\cdot\underline{E}) + (\nabla \times B)\times B \underbrace{- \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \times \underline{B}}_{=\, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(E\times B) + \frac{1}{c} E \times \frac{\partial B}{\partial t}}\right] dV$$

$$\text{y} \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\underline{\nabla}\times\underline{E}$$

$$\Rightarrow \underline{F} = \frac{1}{4\pi}\int_V \left[\underline{E}(\underline{\nabla}\cdot\underline{E}) + (\underline{\nabla}\times\underline{E})\times\underline{E} + (\underline{\nabla}\times\underline{B})\times\underline{B}\right] dV - \frac{1}{4\pi c}\frac{d}{dt}\int_V \underline{E}\times\underline{B}\, dV$$

Podemos identificar $\quad \underline{p}_{em} = \frac{1}{4\pi c}\underline{E}\times\underline{B}$

$$\Longrightarrow \frac{d\underline{P}_{mec}}{dt} + \frac{d\underline{P}_{em}}{dt} = \frac{1}{4\pi}\int_V \left[\underline{E}(\underline{\nabla}\cdot\underline{E}) + (\underline{\nabla}\times\underline{E})\times\underline{E} + (\underline{\nabla}\times\underline{B})\times\underline{B}\right] dV$$

y para expresar una conservación quiero escribir el término de la derecha como una divergencia. Veamos que

$$\left[\underline{E}(\underline{\nabla}\cdot\underline{E}) + (\underline{\nabla}\times\underline{E})\times\underline{E}\right]_i = E_i \partial_j E_j + \overset{\varepsilon_{jki}}{\cancel{\varepsilon_{ijk}}}\, \varepsilon_{jlm}(\partial_l E_m) E_k =$$

$$= E_i \partial_j E_j + (\partial_k E_i) E_k - (\partial_i E_k) E_k = \partial_j (E_i E_j) - \frac{1}{2}\partial_i E^2$$

Para $\underline{B}$, usando que $\underline{\nabla}\cdot\underline{B}=0$

$$\left[\underline{B}(\underline{\nabla}\cdot\underline{B}) + (\underline{\nabla}\times\underline{B})\times\underline{B}\right]_i = \partial_j (B_i B_j) - \frac{1}{2}\partial_i B^2$$

Definimos el tensor de Maxwell

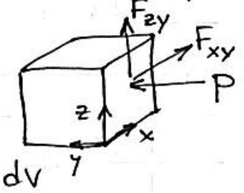
$$\boxed{T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2}(E^2+B^2)\right]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP_{mec}}{dt}{}_i + \frac{dP_{em}}{dt}{}_i = \int_V \partial_j T_{ij}\, dV$$

o

$$\boxed{\frac{d\underline{P}_{mec}}{dt} + \frac{d\underline{P}_{em}}{dt} = \int_V \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}}\, dV = \int_{S(V)} \underline{\underline{T}}\cdot d\underline{S}}$$

T_{ij} representa los esfuerzos en un diferencial de volumen (presión, tensión, etc.).
Es útil para calcular las fzas. sobre una dada configuración.



T_{ij} : fuerza en $\hat{i}$ sobre una sup. con normal $\hat{j}$

Los términos diagonales son de presión y tensión. Los que están afuera de la diagonal son de cizalla. Tienen unidades de fza. x u. de area.

Balance de impulso angular

Tenemos torque $\quad d\underline{\tau} = \underline{r}\times d\underline{F}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\tau} = \int_V \underline{r}\times\underline{F}\, dV$$

y en vacío $\quad F_i = \partial_j T_{ij} - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\underline{E}\times\underline{B})_i$

$$\Rightarrow \quad \underline{\tau} = \int_V \underline{r}\times(\partial_j T_{ij}\,\hat{i})\, dV - \frac{d}{dt}\int_V \underline{r}\times\overbrace{\left(\frac{\underline{E}\times\underline{B}}{4\pi c}\right)}^{P_{em}} dV$$

Veamos cada componente

$$\left[\underline{r} \times \left(\partial_j T_{ij}\, \hat{i}\right)\right]_k = \varepsilon_{kli}\, r_l\, \partial_j T_{ij} = \varepsilon_{kli}\, \partial_j\left(r_l T_{ij}\right) - \varepsilon_{kli}\, T_{ij}\, \partial_j r_l =$$

$$= \partial_j\left(\varepsilon_{kli}\, r_l T_{ij}\right) - \cancel{\underbrace{\varepsilon_{kji}}_{\text{antisimétrico}}\, \underbrace{T_{ij}}_{\text{simétrico}}}$$

Definimos el tensor

$$\boxed{M_{kj} = \varepsilon_{kli}\, r_l\, T_{ij}} \equiv \underline{r} \times \underline{\underline{T}}$$

y la conservación del impulso angular queda

$$\underline{\tau} + \frac{d\underline{L}_{em}}{dt} = \int_V \left(\partial_j M_{kj}\right) \hat{k}\, dV = \int_{S(V)} \underline{\underline{M}} \cdot d\underline{S}$$

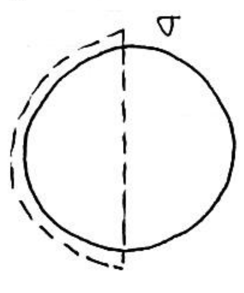
En ausencia de otras fuerzas $\underline{\tau} = \frac{d\underline{L}_{mec}}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\underline{L}_{mec}}{dt} + \frac{d\underline{L}_{em}}{dt} = \int_{S(V)} \underline{\underline{M}} \cdot d\underline{S}}$$

o

$$\boxed{\frac{dL_{mec\,i}}{dt} + \frac{dL_{em\,i}}{dt} = \int_{S(V)} \underbrace{M_{ij}\, dS_j}_{\text{componente i-esima del torque}}}$$

Ejemplo:

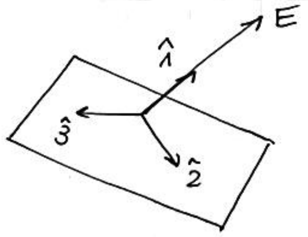


$$\underline{F} = \int_{S(V)} \underline{\underline{T}} \cdot d\underline{S}$$

En el caso puramente eléctrico (o puramente magnético) T_{ij} puede diagonalizarse (en cada punto).

De hecho, como T_{ij} es simétrico en (i,j) puede diagonalizarse salvo cuando $\underline{E} \perp \underline{B}$ y de igual módulo.

Consideremos



$$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} E^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & -E^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & -E^2/2 \end{pmatrix} = \frac{E^2}{8\pi}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora dos casos particulares: la sup. es $\perp$

1) $\hat{n} \parallel \underline{E}$: $\hat{n} = (1,0,0)$

y $d\underline{F} = \underline{\underline{T}} \cdot \hat{n}\, dS = \dfrac{E^2}{8\pi}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dS = \dfrac{E^2}{8\pi}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dS$

$\Rightarrow \boxed{d\underline{F} = \dfrac{E^2}{8\pi}\hat{n}\, dS}$ Tensión

2) $\hat{n} \perp \underline{E}$: por ej. $\hat{n} = (0,0,1)$

y $d\underline{F} = \dfrac{E^2}{8\pi}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dS = -\dfrac{E^2}{8\pi}\hat{n}\, dS$

$\Rightarrow \boxed{d\underline{F} = -\dfrac{E^2}{8\pi}\hat{n}\, dS}$ Presión