Aproximación cuasiestacionaria

Consideremos fenómenos variables en el tiempo en los que

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

es tq

$$\lambda >> d$$

donde d es el tamaño característico de la dist. de carga.

Luego

$$\omega << c/L$$

Tenemos ec. de Maxwell (en el conductor $\underline{j} = \sigma \underline{E}$)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{E} = 4\pi\rho & \nabla \cdot \underline{B} = 0 \\ \nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} & \nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$$

y planteando $\begin{cases} \underline{E} = \underline{E}(\underline{r})\, e^{i\omega t} \\ \underline{B} = \underline{B}(r)\, e^{i\omega t} \end{cases}$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{E} = 4\pi\rho & \nabla \cdot \underline{B} = 0 \\ \nabla \times \underline{E} = -\frac{i\omega}{c}\underline{B} & \nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{j} + \frac{i\omega}{c}\underline{E} \end{cases}$$

En conductores usualmente $\sigma \gg \omega$ y $\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi\sigma \underline{E}}{c}$

Estas ec. se resuelven en forma perturbativa

en $k = \frac{\omega}{c}$

$$\begin{cases} \underline{E}(\underline{r}) = \sum_n k^n \underline{E}^{(n)}(\underline{r}) \\ \underline{B}(\underline{r}) = \sum_n k^n \underline{B}^{(n)}(\underline{r}) \end{cases}$$

Ejemplo: consideremos $\begin{cases} \underline{j} = \underline{j}(\underline{r})\, e^{i\omega t} \\ \rho = 0 \end{cases}$

A orden cero tenemos soluciones

$$\underline{E}^{(0)} = \text{cte} \Leftarrow \begin{cases} \nabla \cdot \underline{E}^{(0)} = 0 & \nabla \cdot \underline{B}^{(0)} = 0 \\ \nabla \times \underline{E}^{(0)} = 0 & \nabla \times \underline{B}^{(0)} = \frac{4\pi}{c}\underline{j} \Rightarrow \underline{B}^{(0)} \neq 0 \end{cases}$$

ó con cdc adecuadas

A primer orden

$$\nabla \cdot \underline{E}^{(1)} = 0 \qquad \nabla \cdot \underline{B}^{(1)} = 0$$

$$\nabla \times \underline{E}^{(1)} = -\frac{i\omega}{c}\underline{B}^{(0)} \qquad \nabla \times \underline{B}^{(1)} = 0$$

$\underline{B}^{(1)} = 0$ con cdc adecuadas

$\Downarrow$

$\underline{E}^{(1)} \neq 0$

Para un conductor, podemos eliminar $\underline{E}$ tomando

$$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{B} = \frac{4\pi\sigma}{c} \nabla \times E$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\cancel{-}\nabla^2 \underline{B} = \cancel{-} \frac{i 4\pi \sigma \omega}{c^2} \underline{B}}$$

Es la ec. de difusión!

(la misma ec. puede obtenerse para $\underline{E}$)

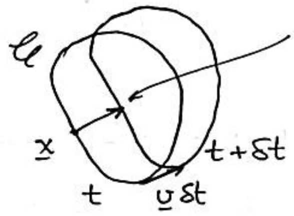
De análisis dimensional, un campo penetra una distancia $\boxed{\delta \sim \sqrt{\frac{c^2}{\sigma\omega}}}$ en un conductor. Luego $\underline{E}$ queda determinado por

$$\boxed{\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{i\omega}{c} \underline{B}}$$

<u>Movimiento de un conductor en un campo magnético</u>

En un conductor en reposo teníamos $\underline{j} = \sigma \underline{E}$. Cuando el conductor se mueve, $\underline{j} = \sigma \underline{E}'$ con $\underline{E}'$ el campo en el referencial del conductor.

Consideremos $v \ll c$ y un circuito móvil en Faraday



$$\oint_{\mathcal{C}} \underline{E}' \cdot d\underline{\ell} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{S(\mathcal{C})} \underline{B} \cdot d\underline{S}$$

Pero ahora tenemos la variación de $\underline{B}$ en el tiempo, y la variación por el desplazamiento. Tomando

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t} \left[\underline{B}(\underline{x} + \underline{v}\delta t, t + \delta t) - \underline{B}(\underline{x}, t) \right] = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{B}(\underline{x}, t)$$

$$\underline{B}(\underline{x} + \underline{v}\delta t, t + \delta t) \simeq \underline{B}(\underline{x}, t) + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \underline{B}}{\partial x_i} v_i \delta t$$

Derivada convectiva

Además, para $\underline{v}$ fijo

$$\nabla \times (\underline{B} \times \underline{v}) = (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{B} - \underline{v} \underbrace{\cancel{(\underline{\nabla} \cdot \underline{B})}}_{=0} + \cancel{\underline{B}(\underline{\nabla} \cdot \underline{v})} - \cancel{(\underline{B} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}}$$

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \underline{E}' \cdot d\underline{\ell} = -\frac{1}{c}\int_{S(\mathcal{C})} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\cdot d\underline{S} - \frac{1}{c}\overbrace{\oint_{\mathcal{C}} \left(\underline{B}\times\underline{v}\right)\cdot d\underline{\ell}}^{\text{variación del flujo por desplazamiento a } \underline{B}=\text{cte}}$$

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \underbrace{\left(\underline{E}' - \frac{1}{c}\underline{v}\times\underline{B}\right)}_{\underline{E} \text{ en el sist. de laboratorio}} \cdot d\ell = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\cdot d\underline{S}$$

$\underline{E}$ en el sist. de laboratorio, pues para una espira fija $\oint_{\mathcal{C}} \underline{E}\cdot d\ell = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\cdot d\underline{S}$

Luego, para $v \ll c$ $\boxed{\underline{E}' = \underline{E} + \frac{1}{c}\underline{v}\times\underline{B}}$

$$\Rightarrow \underline{j} = \sigma\left(\underline{E} + \frac{1}{c}\underline{v}\times\underline{B}\right)$$ para el conductor en movimiento

Ahora tenemos ec. de Maxwell $(\mu = 1)$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{j} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}}}_{v\ll c} \approx \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\underline{E} + \frac{\underline{v}\times\underline{B}}{c}\right)$$

Tomando el rotor

$$-\nabla^2 B = -\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c^2}\underline{\nabla}\times\left(\underline{v}\times\underline{B}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \underline{\nabla}\times\left(\underline{v}\times\underline{B}\right) + \eta\nabla^2\underline{B}}$$ Ec. de inducción

$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ difusividad magnética

Teorema de Alfvén

En un conductor, las líneas de campo magnético están "congeladas" al medio material, y el flujo magnético se conserva. Consideremos $\eta = 0$. De

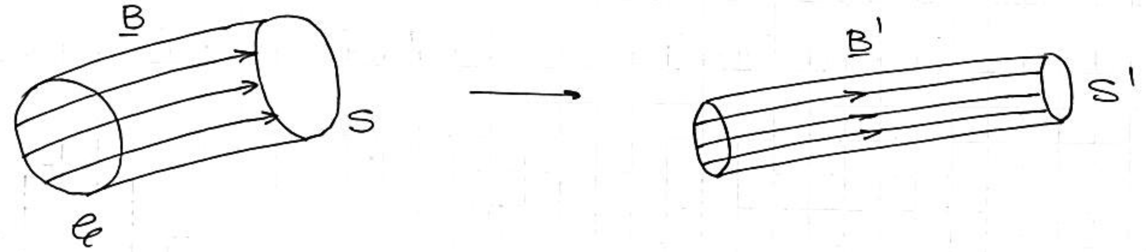
$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{S(\mathcal{C})} \underline{B}\cdot d\underline{S} = -c\int_{\mathcal{C}} \underline{E}'\cdot d\underline{\ell} =$$

$$= -\frac{c}{\sigma}\int_{\mathcal{C}} \underline{j}\cdot d\ell = -\eta\frac{4\pi}{c}\int_{\mathcal{C}} \underline{j}\cdot d\underline{\ell}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\Phi}{dt} = 0} = \frac{d}{dt}\int_{S(\mathcal{C})} \underline{B}\cdot d\underline{S}$$

El flujo magnético a través de cualquier curva material que se desplaza con el conductor se conserva.

$\Rightarrow$ Consideremos un tubo de líneas de $\underline{B}$ delimitadas por una curva $\mathcal{C}$ en un líquido conductor



Cuando el tubo se estira $\displaystyle\int_S \underline{B}\cdot d\underline{S} = \int_{S'} \underline{B}'\cdot d\underline{S}'$

Si S' disminuye $\Rightarrow$ $\underline{B}$ aumenta para conservar el flujo $\Rightarrow$ la energía magnética $U_M = \frac{1}{8\pi}\int B^2 dV$ aumenta (inducción $\rightarrow$ efecto dínamo).

Veamos que este mecanismo es necesario para explicar el campo magnético de la tierra. Si domina la difusión Ohmica

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \approx \eta \nabla^2 \underline{B}$$

y el tiempo de difusión es $T_\eta \sim \frac{L^2}{\eta} = \frac{(3000\,\text{Km})^2}{2.6\ \text{m}^2/\text{s}} \sim 10^4$ años