Magnetohidrodinámica (MHD)

Si el conductor es líquido (o un plasma) necesitamos ecuaciones para $\underline{v}$, ρ, y P. Para la densidad tenemos continuidad de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{v}) = 0 \qquad \text{Si } \rho = cte \Rightarrow \boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{v} = 0}$$

Para $\underline{v}$ tenemos conservación de momento:

$$\frac{d\underline{P}_{mec}}{dt} + \underbrace{\cancel{\frac{d\underline{P}_{em}}{dt}}}_{v \ll c} = \int_V \partial_j \left(T_{ij} + \sigma_{ij} \right) dV$$

tensor de Maxwell

tensor de esfuerzos mecánicos

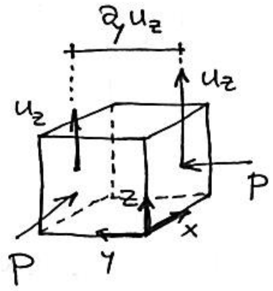
$$\underline{P}_{em} = \frac{1}{4\pi c}\int \underline{E}\times\underline{B}\, dV$$

Consideramos al fluido eléctricamente neutro (igual cant. de portadores de carga positivos y negativos en cada elemento de volumen). Luego

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} \right)$$

y

$$\sigma_{ij} = \underbrace{-p\,\delta_{ij}}_{\text{presión}} + \underbrace{\rho\nu\left(\partial_j v_i + \partial_i v_j\right)}_{\text{esfuerzos viscosos}}$$



Luego

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho v_i\, dV = \int_V \left(\frac{1}{4\pi} B_j \partial_j B_i - \frac{1}{8\pi}\partial_i B^2 - \partial_i p + \rho\nu\,\partial^2_{jj} v_i \right) dV$$

Fza. de Lorentz $\underline{j}\times\underline{B}$

$$\Rightarrow \boxed{\rho\left(\frac{\partial\underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right) = -\underline{\nabla}\left(p + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi}\underline{B}\cdot\underline{\nabla}\underline{B} + \rho\nu\nabla^2\underline{v}}$$

presión mag. tensión mag.

Estas dos ec. junto con la ec. de inducción son las ec. de la MHD. Usando que $\rho = cte$ y tomando $\underline{b} = \frac{\underline{B}}{\sqrt{4\pi\rho}}$ (vel. de Alfvén)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\underline{v}}{\partial t} = -\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v} + \underline{b}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{b} - \underline{\nabla}\left(\dfrac{p}{\rho} + \dfrac{b^2}{2}\right) + \nu\nabla^2\underline{v} \\[2ex] \dfrac{\partial\underline{b}}{\partial t} = \underline{\nabla}\times\left(\underline{v}\times\underline{b}\right) + \eta\nabla^2\underline{b} \end{cases}$$

Ondas electromagnéticas en medios no dispersivos

Vimos que las ec. para $\varphi, \underline{A}$ son ec. de ondas inhomogeneas

Veamos las ec. para los campos en la región libre de fuentes.

Para medios lineales, isótropos y homogeneos

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{D} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\nabla}\cdot\underline{E} = 0$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\nabla}\times\underline{B} = \frac{\mu\epsilon}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

Luego $\quad \underline{\nabla}\times\left(\underline{\nabla}\times\underline{E}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu\epsilon}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\right)$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\nabla^2\underline{E} - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0}$$

$$\text{y} \quad \boxed{\nabla^2\underline{B} - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t} = 0}$$

Transformando Fourier

$$\underline{E}(\underline{r},\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(\underline{r},t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

$$E(\underline{r},t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{E}(\underline{r},\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega = \mathrm{Re}\left[\int_0^{\infty} E(\underline{r},\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega\right]$$

$E(\underline{r},\omega) = E^*(\underline{r},-\omega)$ pues $\underline{E}$ real

$$\Longrightarrow \boxed{\left(\nabla^2 + \frac{\mu\epsilon}{c^2}\omega^2\right)\underline{E}(\underline{r},\omega) = 0}$$

Para cada ω tengo sol. $\quad E(\underline{r},t) = \mathrm{Re}\left[E(\underline{r},\omega)\, e^{-i\omega t}\right]$

Busquemos sol. de onda plana (en cartesianas)

$$E(\underline{r},\omega) = \underset{\text{complejo}}{\underline{E_0}}\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} \qquad \underline{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

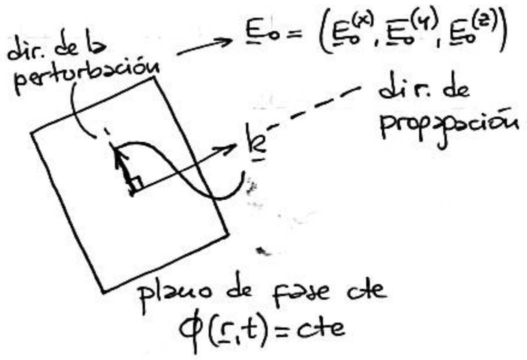
$$\nabla^2\underline{E}(\underline{r},\omega) = -k^2\,\underline{E}(\underline{r},\omega) \quad \Longrightarrow \quad k^2 = \frac{\mu\epsilon}{c^2}\omega^2$$

y $\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E_0}\, e^{i\underbrace{\phi(\underline{r},t)}_{\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t}}$ con $\boxed{k = |\underline{k}| = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{c}\omega}$ Rel. de dispersión

La vel. de fase es $v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n}$ ← indice de refracción

pues los ptos. con fase cte. satisfacen

$\phi(\underline{r},t) = cte = \underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t$ son ondas planas!



Si seguimos los planos con ϕ cte, se mueven con velocidad v_f. Además,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_f .$$

Además, de $\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{k}\cdot\underline{E} = 0}$ y $\underline{k} \perp \underline{E}_0$

Idem $\underline{k}\cdot\underline{B}_0 = 0$ (se sigue de $\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0$).

$\Rightarrow$ Son ondas transversales.

De Faraday $\underline{\nabla}\times\underline{E} = \frac{i\omega}{c}\underline{B}$

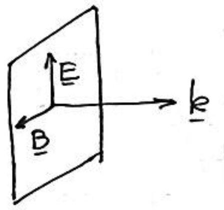
$$(\underline{\nabla}\times\underline{E})_j = E_{0q}\,\varepsilon_{jpq}\,\partial_p\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} = E_{0q}\,\varepsilon_{jpq}\, i k_p\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} =$$

$$= (i\underline{k}\times\underline{E})_j$$

$\Rightarrow$ Faraday queda $\boxed{\cancel{i}\,\underline{k}\times\underline{E} = \frac{\cancel{i}\omega}{c}\underline{B}}$ $\underline{B}\perp\underline{E}\perp\underline{k}$

ie, $(\underline{k},\underline{E},\underline{B})$ definen una terna derecha

y $\boxed{\underline{B} = \sqrt{\mu\epsilon}\,\hat{k}\times\underline{E}}$



$\underline{E}$ y $\underline{B}$ están en fase.

<u>Flujo de energía para una onda plana</u>

Las ec. de Maxwell son lineales en los campos y vale el ppio. de superposición. Sin embargo, debemos tener cuidado con el vector de Poynting, el tensor de Maxwell, y otras cant. cuadráticas en los campos.

Prop: dados $A(t) = \mathrm{Re}\left(A e^{-i\omega t}\right)$
$B(t) = \mathrm{Re}\left(B e^{-i\omega t}\right)$

$$S(t) = A(t)\,B(t) = \mathrm{Re}\left(A e^{-i\omega t}\right)\mathrm{Re}\left(B e^{-i\omega t}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(A e^{-i\omega t} + A^* e^{i\omega t}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(B e^{-i\omega t} + B^* e^{i\omega t}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(AB\, e^{-2i\omega t} + A^*B^*\, e^{2i\omega t} + A^*B + AB^*\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{S(t) = \frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{Re}\left(AB\, e^{-2i\omega t}\right)}_{\text{oscila con } 2\omega} + \frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{Re}\left(AB^*\right)}_{\substack{\text{constante} \\ \text{(valor medio temporal)}}}}$$

En muchos casos (e.g., optica) 2ω es muy rápido y solo se observa el valor medio temporal

$$\langle S(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(AB^*\right).$$

Veamos ahora el caso del vector de Poynting para una onda plana

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi}\,\underline{E}\times\underline{H} = \frac{c}{8\pi\mu}\,\mathrm{Re}\left(\underline{E}_0\times\underline{B}_0\, e^{-2i\omega t} + \underline{E}_0\times\underline{B}_0^*\right)$$

$$\Rightarrow \langle\underline{S}\rangle = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}\,c}{8\pi\mu}\,\mathrm{Re}\left[\underline{E}_0\times\left(\hat{k}\times\underline{E}_0^*\right)\right]$$

$$= \left(\underline{E}_0\cdot\underline{E}_0^*\right)\hat{k} - \cancel{\left(\underline{E}_0\cdot\hat{k}\right)}\,\underline{E}_0^*$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle\underline{S}\rangle = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,|\underline{E}_0|^2\,\hat{k}}$$

Se define el vector de Poynting complejo $\boxed{\underline{\mathbb{S}} = \frac{1}{2}\frac{c}{4\pi}\,\underline{E}\times\underline{H}^*}$ tq $\langle\underline{S}\rangle = \mathrm{Re}\left(\underline{\mathbb{S}}\right)$.

Para la energía del campo

$$u_E = \frac{1}{8\pi}\,\underline{E}\cdot\underline{D} \xrightarrow{\underline{D}=\epsilon\underline{E}} \langle u_E\rangle = \frac{\epsilon}{16\pi}\,|\underline{E}_0^2|$$

$$u_B = \frac{1}{8\pi}\,\underline{B}\cdot\underline{H} \xrightarrow[\underline{B}=\mu\underline{H}]{} \langle u_B\rangle = \frac{1}{16\pi\mu}\,|\underline{B}_0|^2$$

Además $\quad \underline{B} = \sqrt{\mu\epsilon}\;\hat{k}\times\underline{E} \implies |\underline{B}| = \sqrt{\mu\epsilon}\,|\underline{E}|$

$$\implies \langle u_E\rangle = \langle u_B\rangle$$

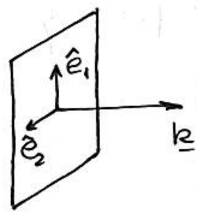
y $\quad \boxed{\langle u\rangle = \frac{\epsilon}{8\pi}\,|E_0|^2}$

<u>Polarización</u>

Dado $\quad \underline{E} = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$

Como $\underline{k}\cdot\underline{E}_0 = 0$ tenemos dos grados de libertad para $\underline{E}_0$

Tomemos terna derecha $\quad (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{k})$



El $\underline{E}_0$ mas general es

$$\underline{E}_0 = E_0^{(1)}\,\hat{e}_1 + E_0^{(2)}\,\hat{e}_2$$

Definimos la polarización de la onda plana como la trayectoria del campo $\underline{E}$ en el plano $\perp \underline{k}$ (para $\underline{r}$ fijo en función de t).

Tomemos

$$\underline{E} = \left(A e^{i\phi_1}\,\hat{e}_1 + B e^{i\phi_2}\,\hat{e}_2\right) e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} =$$
$$= \left(A\,\hat{e}_1 + B\,e^{i(\phi_2-\phi_1)}\,\hat{e}_2\right) e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t+\phi_1)}$$

Luego las componentes son

$$E_1 = \mathrm{Re}\,(\underline{E}\cdot\hat{e}_1) = A\cos\left[\omega(t-t_0)\right] \qquad \text{con } \omega t_0 = \underline{k}\cdot\underline{r}+\phi_1$$
$$E_2 = \mathrm{Re}\,(\underline{E}\cdot\hat{e}_2) = B\cos\left[\omega(t-t_0)-\phi\right] \qquad \phi = \phi_2-\phi_1$$

Calculemos la trayectoria de $\underline{E}$ en el plano. Tomando $\tau = t - t_0$

$$\frac{E_1}{A} = \cos \omega\tau$$

$$\frac{E_2}{B} = \cos\omega\tau \cos\phi + \operatorname{sen}\omega\tau \operatorname{sen}\phi$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_2}{B} - \frac{E_1}{A} c\phi\right)^2 = \underbrace{\operatorname{sen}^2\omega\tau}_{\substack{\parallel \\ 1-\cos^2\omega\tau}} \operatorname{sen}^2\phi$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_2}{B} - \frac{E_1}{A} c\phi\right) = \left[1 - \left(\frac{E_1}{A}\right)^2\right] s^2\phi$$

$$\boxed{\left(\frac{E_2}{B}\right)^2 + \left(\frac{E_1}{A}\right)^2 - \frac{2E_1E_2}{AB} c\phi = s^2\phi}$$

Forma cuadrática