Para ver las trayectorias, la escribimos como

$$\begin{pmatrix} E_1 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/A^2 & \frac{1}{AB} c\phi \\ \frac{1}{AB} c\phi & 1/B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = s^2\phi$$

y es simétrica. Diagonalizando

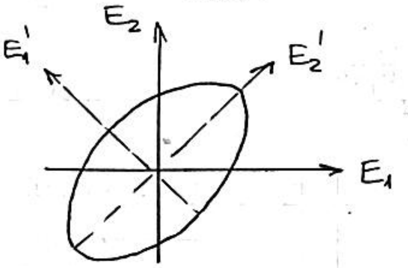
$$\begin{pmatrix} E_1' & E_2' \end{pmatrix} \Phi \begin{pmatrix} 1/A^2 & \frac{1}{AB} c\phi \\ \frac{1}{AB} c\phi & 1/B^2 \end{pmatrix} \Phi^T \begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1' & E_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 E_1'^2 + \lambda_2 E_2'^2 = s^2\phi$$

Basta conocer el signo de $\lambda_1 \cdot \lambda_2$

$$\det \begin{pmatrix} 1/A^2 & \frac{1}{AB} c\phi \\ \frac{1}{AB} c\phi & 1/B^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{A^2B^2}\left(1 - c^2\phi\right) = \frac{1}{A^2B^2} s^2\phi > 0 \qquad (\text{salvo } \phi = 0)$$

$\Longrightarrow$ es una elipse:



Veamos casos particulares

1) $s\phi = 0$: $\left(\frac{E_1}{A} \pm \frac{E_2}{B}\right)^2 = 0$

↳ polarización lineal

2) $c\phi = 0$: $\left(\frac{E_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{B}\right)^2 = s\phi$

Para $A = B$ tenemos polarización circular.

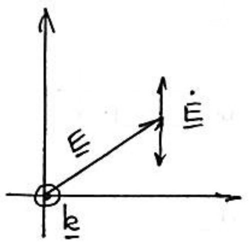
Falta ver la evolución temporal (el sentido de polarización).

Tenemos $\quad \underline{E} = \left(A\hat{e}_1 + Be^{i\phi}\hat{e}_2\right)e^{-i\omega z}$

$\Rightarrow \quad Re\left(\underline{E}(z=0)\right) = A\hat{e}_1 + Bc\phi\,\hat{e}_2$

$\dot{\underline{E}} = -i\omega\left(A\hat{e}_1 + Be^{i\phi}\hat{e}_2\right)e^{-i\omega z}$

$\Rightarrow \quad Re\left(\dot{\underline{E}}(z=0)\right) = \omega B s\phi\,\hat{e}_2$

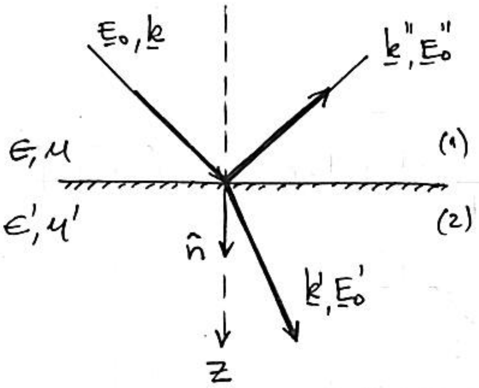


Si $\begin{cases} s\phi > 0 & \text{antihorario} \\ s\phi < 0 & \text{horario} \end{cases}$

Puedo tomar cambio de base $\begin{cases} \hat{e}_+ = \hat{e}_1 + i\hat{e}_2 \leftarrow \text{antihorario} \\ \hat{e}_- = \hat{e}_1 - i\hat{e}_2 \leftarrow \text{horario} \end{cases}$

y $\quad \underline{E} = \left(A\hat{e}_1 + B\hat{e}_2\right)e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} = \left(A'\hat{e}_+ + B'\hat{e}_-\right)e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$

Reflexión y refracción de ondas planas en una interfaz



Onda incidente:

$$\begin{cases} \underline{E} = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} \\ \underline{B} = \sqrt{\mu\epsilon}\;\hat{k}\times\underline{E} \end{cases}, \quad k = \sqrt{\mu\epsilon}\,\frac{\omega}{c}$$

Onda transmitida:

$$\begin{cases} \underline{E}' = \underline{E}_0'\, e^{i(\underline{k}'\cdot\underline{r}-\omega' t)} \\ \underline{B}' = \sqrt{\mu'\epsilon'}\;\hat{k}'\times\underline{E}' \end{cases}$$

Onda reflejada:

$$\begin{cases} \underline{E}'' = E_0'' e^{i(\underline{k}''\cdot \underline{r} - \omega'' t)} \\ \underline{B}'' = \sqrt{\mu\epsilon}\ \hat{k}'' \times \underline{E}'' \end{cases}$$

Las ondas reflejadas y transmitidas salen de imponer cdc. Tenemos condiciones que resultan de la naturaleza ondulatoria y de la interfaz plana, independiente de las cdc. electromagnéticas (cond. cinemáticas).

cualquier cdc. va a ser comb. lineal de las ondas incidente, reflejada y transmitida

$$\alpha e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)} + \beta e^{i(\underline{k}'\cdot\underline{r} - \omega' t)} + \gamma e^{i(\underline{k}''\cdot\underline{r} - \omega'' t)} = 0$$

$\Rightarrow$ 1) Para $\underline{r}$ fijo en el plano, la cdc debe valer $\forall t \Longrightarrow \boxed{\omega = \omega' = \omega''}$

$$\Rightarrow \quad \alpha e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} + \beta e^{i\underline{k}'\cdot\underline{r}} + \gamma e^{i\underline{k}''\cdot\underline{r}} = 0$$

2) La cdc debe valer $\forall \underline{r}$ en el plano

$$\Longrightarrow \quad \underline{k}\cdot\underline{r} = \underline{k}'\cdot\underline{r} = \underline{k}''\cdot\underline{r} \qquad \forall\ \underline{r} \text{ con } z=0$$

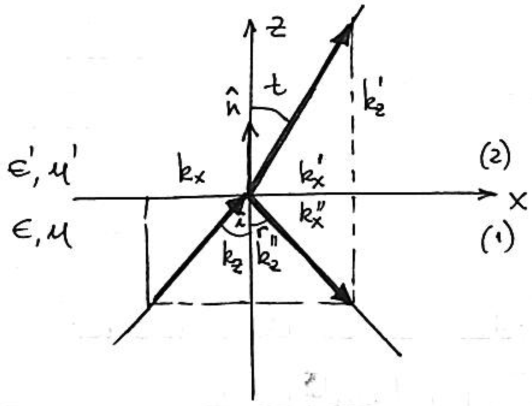
Escribiendo

$$\left.\begin{aligned} \underline{k} &= \underline{k}_{xy} + k_z \hat{z} \\ \underline{k}' &= \underline{k}'_{xy} + k'_z \hat{z} \\ \underline{k}'' &= \underline{k}''_{xy} + k''_z \hat{z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{k}_{xy} = \underline{k}'_{xy} = \underline{k}''_{xy}$$

$\Longrightarrow$ $\underline{k}, \underline{k}', \underline{k}''$ son coplanares. Elijamos $\hat{x}$ en la dirección de $\underline{k}_{xy}$ (de forma tal que el plano xz sea el plano de interés). Luego

$$\begin{cases} \underline{k} = k_x \hat{x} + k_z \hat{z} \\ \underline{k}' = k_x \hat{x} + k'_z \hat{z} \\ \underline{k}'' = k_x \hat{x} + k''_z \hat{z} \end{cases}$$

Tomemos coordenadas:



Se sigue que:

$$\underbrace{\sqrt{\mu\epsilon}\,\frac{\omega}{c}}_{k} \operatorname{sen} i = \sqrt{\mu\epsilon}\,\frac{\omega}{c} \operatorname{sen} r$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} r = \operatorname{sen} i}$$

y:

$$\underbrace{\sqrt{\mu\epsilon}}_{n}\,\frac{\omega}{c} \operatorname{sen} i = \underbrace{\sqrt{\mu'\epsilon'}}_{n'}\,\frac{\omega}{c} \operatorname{sen} t$$

$$\Rightarrow \boxed{n \operatorname{sen} i = n' \operatorname{sen} t}$$ Ley de Snell

k_z, k_z', y k_z'' salen de la rel. de dispersión. Como $k^2 = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2}$

$$\Rightarrow \boxed{k_z^2 = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2}$$

Para obtener las amplitudes debemos usar las cdc. electromag.

(1) $\left(\underline{D}^{(2)} - \underline{D}^{(1)}\right)\cdot\hat{n} = 0 \Rightarrow \left[\varepsilon'\underline{E}_0' - \varepsilon\left(\underline{E}_0 + \underline{E}_0''\right)\right]\cdot\hat{n} = 0$

(2) $\hat{n}\times\left(\underline{E}^{(2)} - \underline{E}^{(1)}\right) = 0 \Rightarrow \hat{n}\times\left[\underline{E}_0' - \left(\underline{E}_0 + \underline{E}_0''\right)\right] = 0$

(3) $\left(\underline{B}^{(2)} - \underline{B}^{(1)}\right)\cdot\hat{n} = 0 \Rightarrow \left[\sqrt{\mu'\epsilon'}\,\hat{k}'\times\underline{E}_0' - \sqrt{\mu\epsilon}\left(\hat{k}\times\underline{E}_0 + \hat{k}''\times\underline{E}_0''\right)\right]\cdot\hat{n} = 0$

(4) $\hat{n}\times\left(\underline{H}^{(2)} - \underline{H}^{(1)}\right) = 0 \Rightarrow \hat{n}\times\left[\sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}\,\hat{k}'\times\underline{E}_0' - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left(\hat{k}\times\underline{E}_0 + \hat{k}''\times\underline{E}_0''\right)\right] = 0$

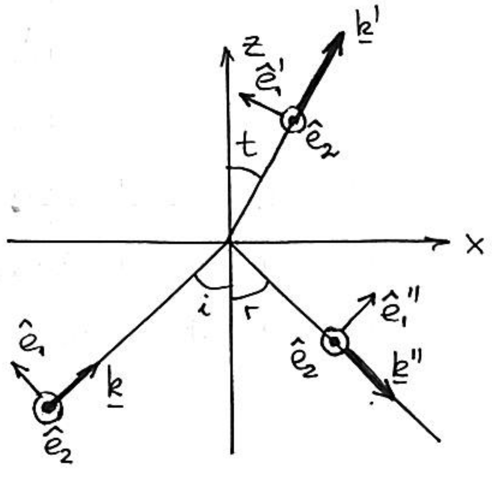
Debemos tener cuidado con la polarización. Como las ec. son lineales, separemos en dos casos:

$$\underline{E}_0 = E_1\,\hat{e}_1 + E_2\,\hat{e}_2$$

y estudiamos por separado

1) $\underline{E}_0 = E_0\,\hat{e}_2$ TE (transverso-eléctrico)
$\underline{E} \perp$ al plano de incidencia

2) $\underline{E}_0 = E_0\,\hat{e}_1$ TM (transverso-magnético)
$\underline{B} \perp$ al plano



1) Caso TE: $\quad \underline{E}_0 = E_0 \hat{e}_2$

Tomemos

$$\underline{E}_0' = E_1'\hat{e}_1' + E_2'\hat{e}_2$$
$$\underline{E}_0'' = E''\hat{e}_2'' + E_2''\hat{e}_2$$

Como $\hat{e}_2 \cdot \hat{n} = 0$, de (1):

$$\varepsilon' E_1' \operatorname{sen} t - \varepsilon E_1'' \operatorname{sen} r = 0$$

De (2): $$\hat{n} \times \left[E_2' - (E_0 + E_2'')\right]\hat{e}_2 + \hat{n} \times \left[E_1'\hat{e}_1' - E_1''\hat{e}_1''\right] = 0$$

son perpendiculares

$$\Rightarrow \begin{cases} E_2' - (E_0 + E_2'') = 0 \\ \cos t \; E_1' + \cos r \; E_1'' = 0 \end{cases}$$

Tenemos 2 ec. l.i. para los coef. E_1' y E_1'' $\Rightarrow$ $\boxed{E_1' = E_1'' = 0}$ con sol. única. Luego $\begin{cases} E_0' = E_2'\hat{e}_2 \\ E_0'' = E_2''\hat{e}_2 \end{cases}$

De (3):

$$\sqrt{\mu'\epsilon'}\,(-E_2' \operatorname{sen} t) - \sqrt{\mu\epsilon}\left[(-E_0 \operatorname{sen} i) + (-E_2'' \operatorname{sen} t)\right] = 0$$

y de Snell $\quad E_2' - E_0' - E_2'' = 0 \quad$ es l.d.

De (4):

$$\sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}E_2'\hat{e}_2(\hat{n}\cdot\hat{k}') - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left[E_0\hat{e}_2(\hat{k}\cdot\hat{n}) + E_2''\hat{e}_2(\hat{n}\cdot\hat{k}'')\right] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}\cos t \, E_2' - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 \cos i + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_2'' \cos i = 0 \\ E_2' - E_2'' = E_0 \end{cases}$$

y tiene sol. única pues $\det = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos i + \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}\cos t \neq 0$

$$\Rightarrow \qquad E_2' = \left(\frac{2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos i}{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos i + \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}\cos t} \right) E_0$$

$$E_2'' = \left(\frac{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos i - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}\cos t}{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos i + \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}\cos t} \right) E_0$$

O bien

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{E_2'}{E_0} &= \frac{2n\cos i}{n\cos i + \frac{\mu}{\mu'}(n'^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 i)^{1/2}} \\ \frac{E_2''}{E_0} &= \frac{n\cos i - \frac{\mu}{\mu'}(n'^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 i)^{1/2}}{n\cos i + \frac{\mu}{\mu'}(n'^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 i)^{1/2}} \end{aligned} \right.$$

Coeficientes de fresnel (TE)

2) <u>Caso TM</u>:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{E_1'}{E_0} &= \frac{2nn'\cos i}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos i + n(n'^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 i)^{1/2}} \\ \frac{E_1''}{E_0} &= \frac{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos i - n(n'^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 i)^{1/2}}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos i + n(n'^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 i)^{1/2}} \end{aligned} \right.$$

Consideremos $\mu \approx \mu' \approx 1$.

Notar que si $(n'^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 i) \geq 0 \Rightarrow$ los coef. son reales.

Además

$\frac{E_2'}{E_0} > 0$ están en fase

$\frac{E_1''}{E_0}$ pueden estar en fase o saltar en π