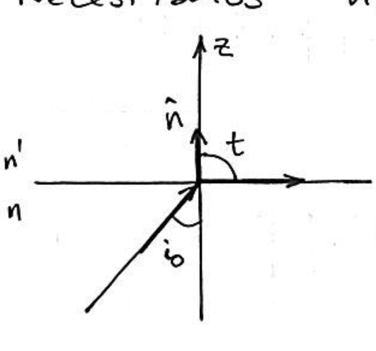
¿Qué pasa cuando $(n'^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 i) < 0$?

Necesitamos $n > n'$: <u>Reflexión total interna</u>



$\exists\ i_0$ tq $\operatorname{sen} i_0 = \dfrac{n'}{n}$, $\operatorname{sen} t = 1$

Tenemos

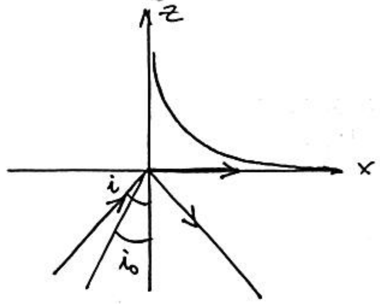
$$\underline{E}' = \underline{E}_0' \, e^{i(k_x x + k_z' z - \omega t)}$$

y $\quad k_z'^2 = \mu'\epsilon' \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 = \mu'\epsilon' \frac{\omega^2}{c^2} - \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \operatorname{sen}^2 i$

$$= n'^2 \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{n^2}{n'^2}\operatorname{sen}^2 i\right) \leq 0 \qquad \text{para } i \geq 0$$

Tomando $k_z' \equiv i k_z$ con $k_z' = -n'^2 \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{n^2}{n'^2}\operatorname{sen}^2 i\right)$

$\Rightarrow \quad \underline{E}' = \underline{E}_0' \, e^{i(k_x x - \omega t)} e^{-\gamma z} \qquad$ con $\gamma = \frac{\omega}{c}\left(n^2 \operatorname{sen}^2 i - n'^2\right)^{1/2}$



La onda se propaga en x

y se atenúa en z

El coef. de fresnel queda (TE)

$$\frac{E_2'}{E_0} = \frac{2n\cos i}{n\cos i + i\left(n^2 \operatorname{sen}^2 i - n'^2\right)^{1/2}} \in \mathbb{C}$$

desfasaje

y para la onda reflejada

$$\frac{E_2''}{E_0} = \frac{n\cos i - i\left(n^2 \operatorname{sen}^2 i - n'^2\right)^{1/2}}{n\cos i + i\left(n^2 \operatorname{sen}^2 i - n'^2\right)^{1/2}} \qquad \text{con} \quad \left|\frac{E_2''}{E_1}\right| = 1$$

(la onda reflejada se lleva tanta energía como la incidente).

El otro caso de interés es cuando

$$n\cos i - n'\cos t = 0 \qquad (TE)$$

$$n'\cos i - n\cos t = 0 \qquad (TM)$$

En ese caso una polarización no es reflejada:

Ángulo de Brewster. Tenemos relaciones

$$\alpha\cos i - \beta\cos t = 0 \qquad \text{y usando Snell}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha\cos i = \beta\left[1 - \left(\frac{n}{n'}\operatorname{sen} i\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\alpha^2\cos^2 i = \beta^2 - \beta^2\frac{n^2}{n'^2}\operatorname{sen}^2 i = \beta^2\left(\cos^2 i + \operatorname{sen}^2 i\right) - \beta^2\frac{n^2}{n'^2}\operatorname{sen}^2 i$$

$$\Rightarrow \quad \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\cos^2 i = \beta^2\left(1 - \frac{n^2}{n'^2}\right)\operatorname{sen}^2 i$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 i = \frac{n'^2(\alpha^2-\beta^2)}{\beta^2(n'^2-n^2)}$$

TE: $\operatorname{tg}^2 i = -1$

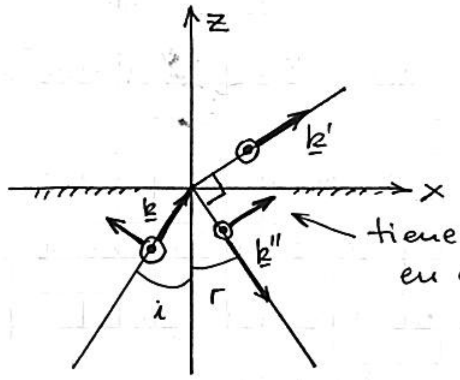
TM: $\operatorname{tg}^2 i = \frac{n'^2}{n^2}$

luego para el caso TM $\exists\ i$ tq $E_1'' = 0$

$$\boxed{\operatorname{tg} i_B = \frac{n'}{n}}$$

y como $n \operatorname{sen} i_B = n' \cos i_B = n' \operatorname{sen} t \Rightarrow \operatorname{sen} t = \cos i_B$

$$\Rightarrow \boxed{i_B + t = \frac{\pi}{2}}$$



tiene solo proy. longitudinal en el rayo transmitido

Ondas en medios conductores

Tenemos $\quad \underline{J}_e = \sigma \underline{E}$

En ausencia de fuentes

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{D} = \underline{\nabla}\cdot\underline{E} = 0 \qquad\qquad \underline{\nabla}\times \underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0 \qquad\qquad \underline{\nabla}\times\underline{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \quad (2)$$

Tomando rotor en (1)

$$\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\nabla^2\underline{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}\times\underline{H} =$$

$$= -\frac{\mu\sigma}{c^2}4\pi\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2\underline{E} - \underbrace{\frac{\sigma\mu}{c^2}4\pi\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}}_{\text{disipación}} - \underbrace{\frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2\underline{E}}{\partial t^2}}_{\text{inducción}} = 0}$$

Transformando fourier
$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}(\underline{r},\omega)e^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2\underline{E} + \mu\frac{\omega^2}{c^2}\underbrace{\epsilon\left(1 + i\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right)}_{\hat{\epsilon}}\underline{E} = 0}$$

$\hat{\epsilon}$ cte dieléctrica compleja con σ real (puede tomarse al revés

Tomando onda plana
$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\mu\epsilon\left(1 + i\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right) \in \mathbb{C}$$

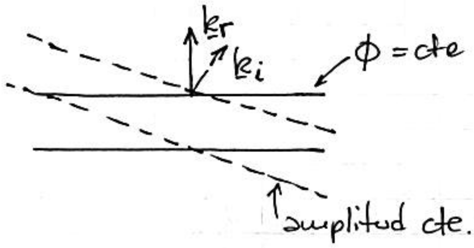
*Podemos pensar en una razón de tiempos T/τ_i con $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (tiempo de excitación) y $\tau_i = \frac{\epsilon}{2\sigma}$ (inercia del material). Si $\frac{T}{\tau_i} = \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ los efectos del conductor son despreciables

Consideremos entonces ω real en conductores.
Con ϵ, μ reales $\Rightarrow \hat{\epsilon} \in \mathbb{C}$ y $\underline{k}$ es complejo.
Tomemos

$$\underline{k} = \underline{k}_r + i\,\underline{k}_i$$

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r},t) = \underbrace{\underline{E}_0\, e^{-\underline{k}_i\cdot\underline{r}}}_{\text{amplitud}}\, e^{i\overbrace{(\underline{k}_r\cdot\underline{r} - \omega t)}^{\text{fase}}}$$

Ahora tenemos ondas planas con fase constante en planos $\perp \underline{k}_r$, y amplitud constante en planos $\perp \underline{k}_i$



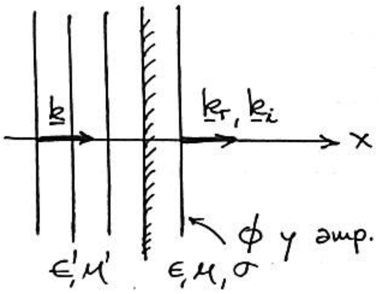
Las ondas se propagan en $\underline{k}_r$ y se atenúan en $\underline{k}_i$.

Las ondas siguen siendo transversales. Supongamos que hubiera una componente en $\hat{k}_r$. Tomemos $\hat{x}$ en $\hat{k}_r$

$$\begin{cases} \underline{E} = E_x(x,t)\,\hat{x} + \underline{E}_\perp(x,t) \\ \underline{H} = H_x(x,t)\,\hat{x} + \underline{H}_\perp(x,t) \end{cases}$$

y soluciones 1D ($\underline{k}_i \parallel \underline{k}_r$)

(por ejemplo, tenemos incidencia normal en la sup. de un conductor)



Como
$$\begin{cases} \underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ \underline{\nabla}\cdot\underline{B} = \dfrac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_x = E_x(t)$$
$$B_x = B_x(t)$$

Además
$$\underline{\nabla}\times\underline{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\,\underline{E} + \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

Tomando la componente x

$$0 = \frac{4\pi\sigma}{c} E_x + \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_x(t) = E_{0x}\, e^{-\frac{4\pi\sigma}{\epsilon}t}}$$

$\frac{\epsilon}{4\pi\sigma}$ es el tiempo característico para que el medio anule el campo longitudinal en el interior por disipación óhmica.

Además $$\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

y la componente x : $\frac{\partial B}{\partial t} = \mu\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{H_x = cte}$

Veamos las componentes transversales.

$$\begin{cases} \underline{E}_\perp = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} \\ \underline{H}_\perp = \underline{H}_0\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} \end{cases}$$

con $\underline{k} = k\hat{x}$, $k^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2}\left(1 + i\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega}\right)$

Tomemos
$$k = k_0(\alpha + i\beta)$$

$$\Rightarrow k^2 = k_0^2\left[(\alpha^2-\beta^2) + 2i\alpha\beta\right] = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2}\left(1 + i\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega}\right)$$

luego $\boxed{k_0 = \sqrt{\mu\epsilon}\,\frac{\omega}{c}}$ y $\begin{cases} \alpha^2-\beta^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega}\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1\right]^{1/2} \\ \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1\right]^{1/2}\end{cases}$$

y $$\boxed{\underline{E}_\perp = \underline{E}_0\, e^{-k_0\beta x}\, e^{i(k_0\alpha x - \omega t)}}$$

Casos límites:

1) Mal conductor $\qquad \frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \ll 1$

Por Taylor a primer orden $\begin{cases} \alpha \approx 1 \\ \beta \approx \frac{2\pi\sigma}{\epsilon\omega} \end{cases}$

$$\Rightarrow k = k_0(\alpha + i\beta) \approx \sqrt{\mu\epsilon}\,\frac{\omega}{c}\left(1 + i\frac{2\pi\sigma}{\epsilon\omega}\right) =$$

$$= \sqrt{\mu\epsilon}\,\frac{\omega}{c} + i\,\underbrace{\frac{2\pi\sigma}{\epsilon c}\sqrt{\mu\epsilon}}_{\substack{\text{independiente de } \omega \text{ si } \epsilon,\mu \\ \text{son indep. de } \omega}}$$

Luego $\qquad \underline{E}_\perp = \underline{E}_0\, e^{-\frac{2\pi\sigma}{\epsilon c}\sqrt{\mu\epsilon}\,x}\, e^{i(k_0 x - \omega t)}$

y se propaga como en el vacío pero decae con x. Notar que un paquete se propaga y atenúa sin deformarse.

2) Buen conductor: $\qquad \frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \gg 1$

$$\Rightarrow \qquad \alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\epsilon\omega}}$$

$$\Rightarrow \quad k = \sqrt{\mu\epsilon}\,\frac{\omega}{c}\left(\frac{2\pi\sigma}{\epsilon\omega}\right)^{1/2}(1+i) = \underbrace{\frac{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}{c}}_{\equiv 1/\delta}\,(1+i)$$

long. pelicular o de penetración

y $\qquad \boxed{\underline{E}_\perp = \underline{E}_0\, e^{-x/\delta}\, e^{i\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right)}}$

Además, ahora $\omega = \omega(k) \Rightarrow v_f = v_f(k)$ y el medio es dispersivo. En el caso general

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{E}_0(k, t)\, e^{i(kx - \omega t)}\, dk$$