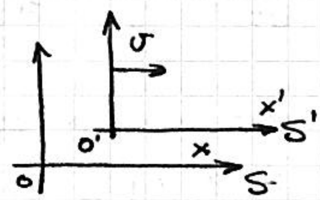
Teoría de la relatividad especial

Transformaciones de Galileo y covariancia de Newton

Las ec. de la mecánica son invariantes (no cambian de forma, ie. covariantes = "varían como una escalar" función) frente a transformaciones de Galileo:

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$



O bien $\begin{cases} \underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}t \\ t' = t \end{cases}$

Tenemos $$m \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \underline{F}(\underline{r}, t)$$

y $$\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{d^2\underline{r}'}{dt'}, \quad \underline{F}(\underline{r}, t) = \underline{F}(\underline{r}(\underline{r}', t'), t') = \underline{F}'$$

$$\Rightarrow \quad m \frac{d^2\underline{r}'}{dt'^2} = \underline{F}'(\underline{r}', t')$$ si la fuerza es invariante

Se introduce el concepto de sistema inercial: el sist. en el que un cuerpo en ausencia de fzas. exteriores se mueve con $\underline{v}$ cte.

Las ec. de Maxwell no son invariantes frente a transf. de Galileo. Por ejemplo, las ec. para ϕ y $\underline{A}$ en el gauge de Lorentz en vacío y en una región libre de fuentes satisfacen

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

que tienen sol. unidimensional $\chi = f(x \pm ct)$

Veamos como se transforma esta ec. en el sist. S'

En el caso unidimensional $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$

y
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial}{\partial t'}\cancel{\frac{\partial t'}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'}\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{=-v} + \frac{\partial}{\partial t'}\underbrace{\frac{\partial t'}{\partial t}}_{=1} = \frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}$$

Reemplazando en la ec. de ondas

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi = \left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)\right]\chi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \chi}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t'^2} + v^2\frac{\partial^2 \chi}{\partial x'^2} - 2v\frac{\partial^2 \chi}{\partial x'\partial t'}\right) = 0$$

Para ondas en medios materiales, la ec. de ondas homogenea solo es válida en el sist. de referencia en que el medio está en reposo.

$\Rightarrow$ se introdujo el ÉTER: las ec. de Maxwell están escritas en el sist. en el que el éter está en reposo.

Tres experimentos generaron problemas con esta hipótesis

1. Mediciones de la vel. de la luz en fluidos en movimiento (Fizeau, 1859)
2. El experimento de Michelson-Morley (1887)
3. La aberración (corrimiento en la posición

aparente) de las estrellas.

El exp. 2 intentó medir el mov. de la tierra respecto al éter y falló. Se explicó con la contracción de FitzGerald-Lorentz

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

El exp. 1 se explicó asumiendo que el fluido arrastra parcialmente al éter, con una efectividad que depende del n del medio.

A principios de siglo las posibles explicaciones eran
1. Las ec. de Maxwell son incorrectas; las ec. del electromagnetismo son inv. de Galileo
2. Las ec. de Maxwell son válidas en el sist. de ref. fijo al éter; la descripción de la interacción de los campos y la materia con el éter seguía una gran cantidad de reglas complejas.
3. Todas las ec. de la física son covariantes, pero no ante transf. de Galileo.

Postulados de la relatividad especial

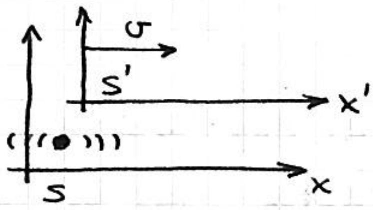
Einstein consideró la tercer opción y propuso:
1. Las ec. de la física son las mismas (covariantes) en todos los sistemas en MRU respecto al otro (sist. inerciales).

2. La vel. de la luz en el vacío es la misma en todos los sist. de referencia y es independiente del movimiento de la fuente.

Estos postulados excluyen las transformaciones de Galileo. En estas transformaciones, la ley de transf. para la velocidad es

$$x' = x - vt \implies V' = V - v$$

Si emito un pulso de luz en S



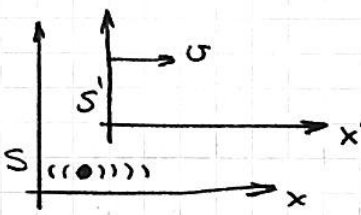
$V_S = c$

$V_{S'} = c$

y según Galileo $V_{S'} = c - v$

El postulado 2 también implica que c es la vel. máxima posible. Si no, puedo desplazar una carga con $v > c$ y tener conexión causal más rápida que $\frac{x}{c}$.

Suceso: queda definido por $t, \underline{r}$ en un sist. de ref.
Consideremos



Emitimos un pulso en x_1, y_1, z_1, t_1
En t_2 viajó $c(t_2 - t_1)$

$$\Rightarrow c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0$$

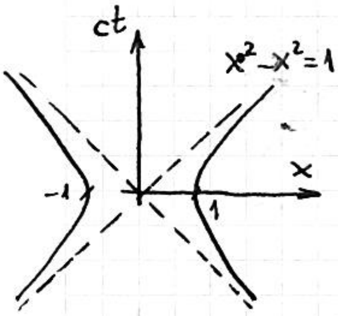
En S'

$$c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2 = 0$$

Para dos sucesos cualquiera se define el <u>intervalo</u>:

$$\Delta s_{12} = c^2 \Delta t_{12}^2 - \Delta x_{12}^2 - \Delta y_{12}^2 - \Delta z_{12}^2$$

y $\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$ ← noción de dist. en una geometría pseudoeuclideana



Como $ds = 0 \Leftrightarrow ds' = 0$

$$\Rightarrow ds^2 = \alpha \, ds'^2$$

pero si cambio $v \to -v$ o $S \to S'$ $\Big\} \Rightarrow \alpha = 1$

$\Rightarrow \boxed{ds^2 = ds'^2}$ INVARIANTE relativista

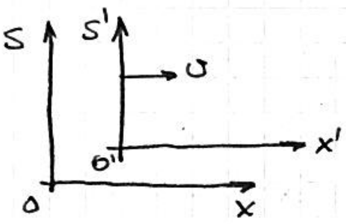
Consideremos ahora que el pulso se emite en $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, $t_1 = 0$, y que en ese instante el origen de coord de S y S' coinciden, con $t' = t$. Luego, como s invariante

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad y \quad \underbrace{c^2t^2}_{x^0} - x^2 = \underbrace{c^2t'^2}_{x^{0\prime}} - x'^2$$

Tomamos rotación $\begin{cases} x^{0\prime} = x^0 \cosh \xi - x \operatorname{senh} \xi \\ x' = -x^0 \operatorname{senh} \xi + x \cosh \xi \end{cases}$

Para el mov. de O (origen de S) respecto de S'



$$x = 0 \Rightarrow \quad x^{0\prime} = ct = x^0 \cosh \xi$$
$$x' = -vt = -x^0 \operatorname{senh} \xi$$

$$\Rightarrow \operatorname{tgh} \xi = \frac{v}{c} = \beta$$

luego $\quad \sinh \xi = \gamma\beta \qquad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\quad\quad\quad \cosh \xi = \gamma$

Transf. de Lorentz

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{0\prime} = \gamma\,(x^0 - \beta x^1) & x^0 = ct \\ x^{1\prime} = \gamma\,(x^1 - \beta x^0) & x^1 = x \\ x^{2\prime} = x^2 & x^2 = y \\ x^{3\prime} = x^3 & x^3 = z \end{cases}$$

Las transf. inversas salen de cambiar $\begin{cases} \beta \rightarrow -\beta. \\ x \rightarrow x' \end{cases}$

Se introduce el cuadrivector posición

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad x^\mu \qquad \mu = 0,1,2,3$$

$$\parallel$$

$$(\underbrace{x^0}_{\text{parte temporal}}, \underbrace{\underline{x}}_{\text{parte espacial}})$$

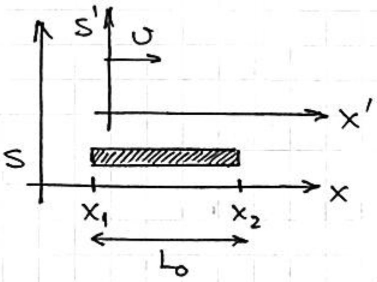
$x_i \quad i = 1,2,3$

Las transformaciones de Lorentz

Notar que $v < c$. Para $c \rightarrow \infty$ las transf. se reducen a Galileo.

"long. propia"

Consideremos una barra de long L_0 en reposo en el sist S. En S', debemos medir x_2' y x_1' en el mismo instante t'. Usando la transf. inversa



$$x_1 = \gamma\,(x_1' + v t')$$

$$x_2 = \gamma\,(x_2' + v t')$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = L_0 = \gamma\,(x_2' - x_1') = \gamma L'$$

$$\Rightarrow \boxed{L' = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Contracción de FitzGerald-Lorentz

Consideremos ahora un reloj en reposo en el sist. S'. Sean dos sucesos que ocurren en x_1', y', z' en t_1' y t_2'. El tiempo transcurrido en S' (tiempo propio) es $\Delta t' = t_2' - t_1'$.

Veamos Δt en S : $\quad ct_1 = \gamma\left(ct_1' + \beta x_1'\right)$

$$ct_2 = \gamma\left(ct_2' + \beta x_2'\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \qquad \text{Dilatación temporal}$$

Transformación de la velocidad

Tenemos $\underline{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ y queremos $\underline{v}' = \dfrac{\Delta x'}{\Delta t'}$

De Lorentz

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - \beta c\,\Delta t\right)$$
$$c\,\Delta t' = \gamma\left(c\,\Delta t - \beta\,\Delta x\right)$$
$$\Delta y' = \Delta y$$
$$\Delta z' = \Delta z$$

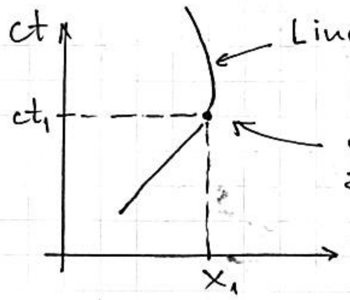
$$\Rightarrow v_x' = \frac{\Delta x - \beta c\,\Delta t}{\Delta t - \beta \frac{\Delta x}{c}} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - \cancel{\beta c}^{\,v}}{1 - \frac{\beta}{c}\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

divido por Δt

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x' = \dfrac{v_x - v}{1 - \beta \frac{v_x}{c}} \\[2ex] v_y' = \dfrac{v_y}{\gamma\left(1 - \beta \frac{v_x}{c}\right)} \\[2ex] v_z' = \dfrac{v_z}{\gamma\left(1 - \beta \frac{v_x}{c}\right)} \end{cases}$$

Diagramas de espacio-tiempo

Consideremos el espacio de Minkowski del sist. de referencia S



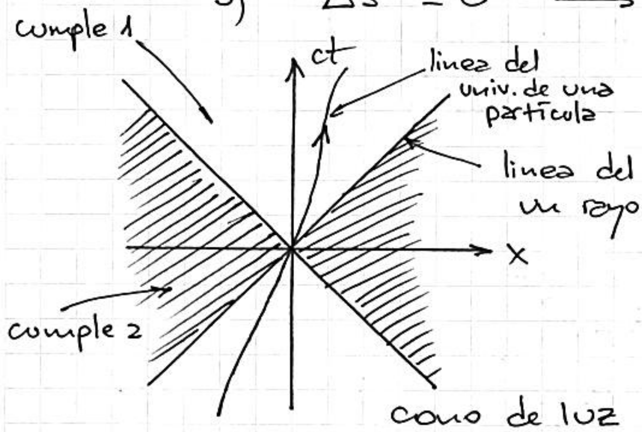
Δs^2 es invariante. Podemos clasificar fenómenos según

1) $\Delta s^2 > 0$

2) $\Delta s^2 < 0$

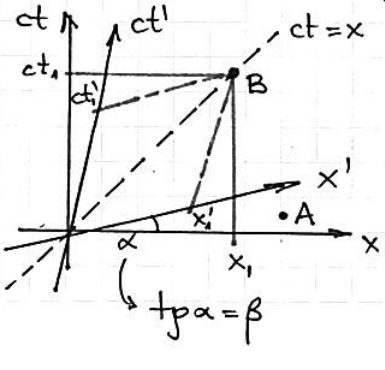
3) $\Delta s^2 = 0 \longrightarrow$ rayo de luz $c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\Rightarrow \quad c|t| = |\underline{x}|$



Las zonas están separadas por la sup. con $\Delta s^2 = 0$
$\Rightarrow$ tienen caracter absoluto (son indep. del sist. de referencia).

Veamos x' y ct' para un sist. de referencia S' que se mueve con v uniforme



$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$$

Los eventos simultaneos en S (ptos. sobre el eje x) no lo son en S' (en S' los eventos simultaneos estan sobre el eje x'). En part. A está en el futuro de S y en el pasado de S'.

Los eventos con $\Delta s^2 > 0$ (1) cumplen

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 > 0$$

Consideremos $\Delta y = \Delta z = 0$. En el sistema que se mueve con $\beta = \frac{\Delta x}{c \Delta t}$:

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - \beta c \Delta t) = 0$$
$$\Delta t' = \gamma (c \Delta t - \beta \Delta x) \neq 0$$

$$\Longrightarrow \Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2$$ (Separación temporal)

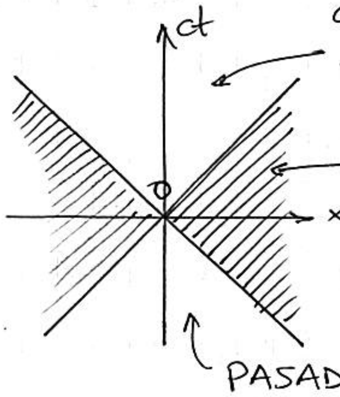
Los eventos con $\Delta s^2 < 0$ (2) cumplen

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 < 0$$

Ahora podemos hallar un sistema S' tq $\Delta t' = 0$ y

$$\Delta s'^2 = - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 < 0$$ (Separación espacial)

(los dos eventos no pueden tener conexión causal



FUTURO ABSOLUTO (conectado causalmente con O)

otra parte (los sucesos pueden estar en el pasado o el futuro según el sist.) ⟶ No están conectados causalmente con O

PASADO ABSOLUTO (conectado causalmente con O)