Formalismo de cuadrivectores

Teníamos el cuadrivector posición x^μ

$$(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \underline{x})$$

con "longitud" $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = s^2$ (Espacio de Minkowski)

¿Cuáles son las transf. que dejan al módulo de x^μ invariante? Tenemos

1) Transf. de Lorentz
2) Rotaciones espaciales (las coord. espaciales están en un espacio euclídeo)

(1) + (2) forman el grupo de Poincaré (más reflexiones).
Del primer postulado de la relatividad especial, las ec. de la física deben ser invariantes de forma bajo la acción de estas transformaciones $\Rightarrow$ las magnitudes involucradas tienen que poder escribirse como cuadrivectores (o tensores de rango mas alto) que se transformen como x^μ.

Consideremos cuatro cantidades A^μ que se transforman como las componentes de x^μ

$$\left.\begin{aligned} A^{0'} &= \gamma\,(A^0 - \beta A^1) \\ A^{1'} &= \gamma\,(A^1 - \beta A^0) \\ A^{2'} &= A^2 \\ A^{3'} &= A^3 \end{aligned}\right\}$$

$A^\mu = (A^0, \underline{A})$ es un cuadrivector <u>contravariante</u>

En gral: $\boxed{A'^\mu = \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu}$ con conv. de la suma.

Notar que la distancia (la geometría del espacio tiempo) en el espacio de Minkowski está dada por el intervalo

$$ds^2 = c\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 =$$
$$= (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

(forma cuadrática

con $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Tensor métrico

La "longitud" de A^μ en este espacio es

$$A^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

Introduciendo un cuadrivector <u>covariante</u>

$$A_\mu = (A_0, -\underline{A}) \qquad \text{o} \qquad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

podemos escribir

$$A^\mu A_\mu = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 =$$
$$= (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

<u>escalar</u> (invariante relativista o de Lorentz)

Un vector covariante se transforma en general como $\boxed{A'_\mu = \dfrac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu}$

<u>Ejemplo</u>: Si $A^\mu = x^\mu = (ct, \underline{x})$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu = (ct, -\underline{x})$$

y $x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\mu = (ct)^2 - |\underline{x}|^2 = s^2$ <u>invariante</u>

De $\quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad \Longrightarrow \quad \boxed{g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}} \quad$ y $\quad g^{\mu\alpha} g_{\nu\beta} = \delta^\alpha_\beta$

Notar que un diferencial se trasforma según

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu \qquad \text{ó} \qquad dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

(ie. se trasforma como el vector contravariante)

$\Rightarrow$ un <u>vector contravariante</u> se trasforma como un diferencial de las coordenadas.

Por otro lado, el diferencial de una func. escalar debe ser un <u>invariante</u>. Se trasforma como

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

debe ser covariante

frente a un cambio de coord., sabemos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$$

(se trasforma como un vector covariante)

$\Rightarrow$ un <u>vector covariante</u> se trasforma como las derivadas de un escalar.

En geometrías no euclidianas tenemos que distinguir entre los dos tipos de vectores.

<u>Ejemplo</u>: consideremos el intervalo en cilíndricas

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2$$

o el sistema no-inercial que rota con Ω fijo: $\phi = \phi' + \Omega t'$

$$ds'^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2) dt'^2 - 2\Omega r'^2 d\phi' dt' - dz'^2 - dr'^2 - r'^2 d\phi'^2$$

Veamos en Minkowski cuanto vale la matriz de trasformación $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \equiv L^\mu_\nu$:

En Minkowski la ley de transformación $x^\mu \longrightarrow x'^\mu$ es Lorentz:

$$x'^0 = \gamma\left(x^0 - \beta x^1\right)$$
$$x'^1 = \gamma\left(x^1 - \beta x^0\right)$$
$$x'^2 = x^2$$
$$x'^3 = x^3$$

$$L^\mu_{\ \nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{L}} \Longrightarrow x' = \underline{\underline{L}}\, x$$

para vectores contravariantes

Es facil ver que $\underline{\underline{L}}^{-1}(\beta) = \underline{\underline{L}}(-\beta)$

Podemos generalizar estos conceptos a tensores: por ejemplo,

16 cantidades que se transforman según

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}$$

son un <u>tensor contravariante de segundo rango</u>.

Y vale que:

1) $T^\mu_{\ \nu} = g_{\alpha\nu} T^{\mu\alpha}$ ("bajar un índice")

2) $T^{\alpha\beta\gamma} W_{\alpha\delta} = R^{\beta\gamma}_{\ \ \ \delta}$ ("contraer un índice")

Contrayendo todos los índices obtenemos un escalar (= invariante)

<u>Operador de derivada parcial</u>

Habiamos visto que $\frac{\partial\varphi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$

Armemos el cuadrivector covariante

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \underline{\nabla}\right)$$

y podemos construir el vector contravariante como

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\underline{\nabla}\right)$$

Ahora, dado un vector contravariante A^μ

$$\partial_\mu A^\mu \quad \text{es invariante}$$

El operador $\partial_\mu \partial^\mu$ también debe ser invariante:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{12}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{22}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{32}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

Ecuaciones de Maxwell

Por el primer postulado de la relatividad especial, las leyes de la física (y en particular las ec. de Maxwell) deben poder expresarse de igual forma en todo sistema inercial $\Rightarrow$ deben tener una formulación covariante.

Por la definición de $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ la ec. de ondas es covariante.

De la ec. de continuidad $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{j} = 0$ (cons. de la carga)

Es covariante si ρ y $\underline{j}$ forman un cuadrivector de la forma

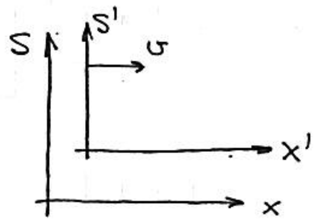
$$J^\mu \doteq (c\rho, \underline{j}) \qquad \text{cuadrivector corriente}$$

$\Rightarrow$ la ec. de continuidad queda

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu = 0}$$

Además, las componentes de J^μ se transforman como x^μ

$$c\rho' = \gamma(c\rho - \beta j_x) \qquad j_y' = j_y$$
$$j_x' = \gamma(j_x - \beta c\rho) \qquad j_z' = j_z$$



En el gauge de Lorentz $\quad \underline{\nabla}\cdot\underline{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$

y
$$\begin{cases} \nabla^2\underline{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\underline{j} \\ \nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\rho \end{cases}$$

$\Rightarrow$ φ y $\underline{A}$ deben ser las componentes de un cuadrivector

$A^\mu = (\varphi, \underline{A})$ $\quad$ cuadrivector potencial del campo electromagnéti

Luego el gauge de Lorentz queda

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0}$$

tiene la forma de ley de cons.!
Expresa que los estados del fotón no tienen proy. en spin 0 (masa del fotón $=0$)
De hecho, elimina el spin 0 en la rep. del gauge de Lorentz pues $k_\mu A^\mu = 0$

y las ec. de ondas inhomogéneas quedan

$$(\partial_\mu\partial^\mu)A^\mu = \frac{4\pi}{c}J^\mu$$

o

$$\boxed{\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c}J^\mu}$$

Veamos ahora como se transforman $\underline{E}$ y $\underline{B}$. Tenemos

$$\begin{cases} \underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \\ \underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A} \end{cases}$$

Veamos si estos campos son las componentes de un tensor de segundo rango. Definamos el tensor intensidad de campo

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Es antisimétrico $\Rightarrow$ los elementos diagonales son nulos y como es de 4×4 tiene 6 componentes independientes.

Veamos las componentes

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -E_x$$

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -B_z$$

$$F^{13} = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 = -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} = B_y$$

y

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Definamos el pseudotensor $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & \text{permutaciones pares de } 0,1,2,3 \\ -1 & \text{permutaciones impares} \\ 0 & \text{para indices repetidos} \end{cases}$

Dado un tensor antisimétrico $A^{\mu\nu}$, se define el dual (pseudotensor) como

$$\mathcal{A}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} A_{\mu\nu}$$

Notar que $\mathcal{A}^{\mu\nu} A_{\mu\nu}$ es un pseudoescalar (recordar que el dual $\mathcal{V}$ de un espacio V está formado por todas las funcionales lineales en V).

Luego el dual del tensor intensidad de campo es

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos ahora como se escriben las ec. de Maxwell en forma covariante. Tomemos

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu}_{\frac{4\pi}{c} J^\nu} - \partial_\nu \underbrace{\left(\partial_\mu A^\mu\right)}_{0 \text{ por Gauge de Lorentz}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu}$$

son 4 ecuaciones para $\nu = 0,1,2,3$

Veamos que ec. son

$\nu=0)\quad \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{4\pi}{\cancel{c}}\cancel{c}\rho \Rightarrow \underline{\nabla}\cdot\underline{E} = 4\pi\rho$

$\nu=1)\quad \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \frac{4\pi}{c} j_x \Rightarrow (\underline{\nabla}\times\underline{B})_x = \frac{4\pi}{c} j_x + \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}$

$$\underbrace{\partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31}}_{= -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)}$$

$\Rightarrow$ son las ec. de Maxwell inhomogéneas. Nos faltan las 4 ec. homogeneas. Tomemos

$$\boxed{\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0}$$

y veamos que son las ec. faltantes

$\nu=0)\quad \partial_1 \mathcal{F}^{10} + \partial_2 \mathcal{F}^{20} + \partial_3 \mathcal{F}^{30} = 0 \Rightarrow \underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0$

$\nu=1)\quad \partial_0 \mathcal{F}^{01} + \partial_2 \mathcal{F}^{21} + \partial_3 \mathcal{F}^{31} = 0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$

$$(\underline{\nabla}\times\underline{E})_x + \frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

Usando la definición del tensor dual esta ec. puede escribirse en términos de $F^{\mu\nu}$ como

$$\boxed{\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} = 0} \quad \text{con } \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, \text{ó } 3$$

<u>Transformación del campo electromagnético</u>

Veamos primero que ciertas cantidades no cambian (son invariantes relativistas). Las podemos hallar contrayendo indices. Tomemos

1) $F^\mu{}_\mu = 0$ (la traza es nula en todo sistema)

2) $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2E^2 + 2B^2 = -2(E^2 - B^2)$

3) $F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} = -4\,\underline{E}\cdot\underline{B}$

Es decir que $\begin{cases} \text{si} \quad \underline{E} \perp \underline{B} \text{ en } S \Rightarrow \underline{E}' \perp \underline{B}' \text{ en todo } S' \\ \text{si} \quad E^2 - B^2 > 0 \text{ en } S \Rightarrow E'^2 - B'^2 > 0 \text{ en todo } S' \end{cases}$

Veamos ahora las transformaciones. $F^{\mu\nu}$ debe transformarse como

$$F'^{\mu\nu} = L^{\mu}_{\alpha} L^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta} \quad \text{con} \quad L^{\mu}_{\alpha} = \left(\begin{array}{cc|cc} \gamma & -\beta\gamma & \multicolumn{2}{c}{\emptyset} \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\emptyset} & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se obtiene

$$\begin{cases} E'_{\parallel} = E_{\parallel} \\ \underline{E}'_{\perp} = \gamma\left(\underline{E}_{\perp} + \underline{\beta} \times \underline{B}\right) \\ B'_{\parallel} = B_{\parallel} \\ \underline{B}'_{\perp} = \gamma\left(B_{\perp} - \underline{\beta} \times \underline{E}\right) \end{cases}$$