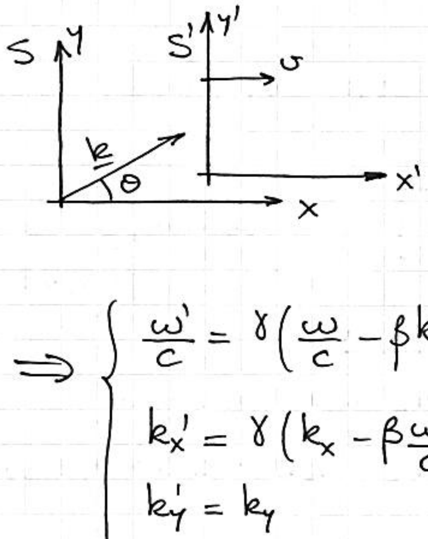
Efecto Doppler relativista

Consideremos una onda plana en S

$$\underline{E} = \underline{E}_0 \, e^{i(\omega t - \underline{k}\cdot\underline{x})} = \underline{E}_0 \, e^{i k_\mu x^\mu}$$

con $k_\mu = \left(\frac{\omega}{c}, -\underline{x}\right)$ y $k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \underline{x}\right)$ (cuadrivector de onda)

consideremos la onda en S':



$$\underline{E}' = \underline{E}_0' \, e^{\underbrace{i k'_\mu x'^\mu}} \longrightarrow \text{la fase es un invariante relativista}$$

↑ según la transf. de los campos

con $\boxed{k'_\mu x'^\mu = k_\mu x^\mu}$

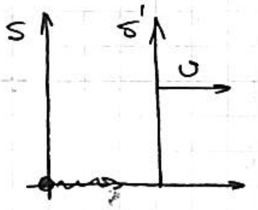
$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \beta k_x\right) \\ k'_x = \gamma\left(k_x - \beta \frac{\omega}{c}\right) \\ k'_y = k_y \\ k'_z = k_z \end{cases}$$

En S y S' tenemos onda plana que se propaga con vel. c. Pero la frec. cambia para satisfacer $|\underline{k}'| = \frac{\omega'}{c}$

Usando $k_x = k\cos\theta$
$= \frac{\omega}{c}\cos\theta$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\omega' = \frac{\omega\left(1 - \beta\cos\theta\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}}$

Casos particulares:

$\theta = 0$) El observador se aleja de la fuente

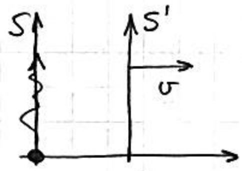


$$\omega' = \omega \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} < \omega$$

$\theta = \pi$) El obs. se acerca a la fuente

$$\omega' = \omega \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > \omega$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$)

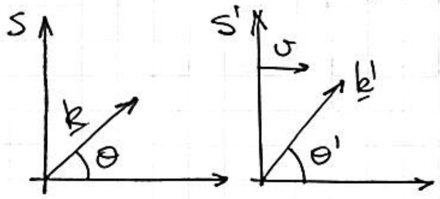


Es el caso de prop. transversal

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(no existe en el caso clásico)

Además, en S' hay un cambio en la dirección de propagación.



Tenemos $k_x' = \gamma \left(k_x - \beta \frac{\omega}{c} \right)$

$$\Rightarrow \frac{\omega'}{\cancel{c}} \cos\theta' = \gamma \frac{\omega}{\cancel{c}} (\cos\theta - \beta)$$

y como $\omega' = \omega \gamma (1 - \beta \cos\theta)$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta \cos\theta}}$$

(Esto explica la aberración estelar).

Mecánica relativista

Las ec. de Newton no son covariantes. Para tener una mec. relativista debemos definir velocidades, aceleraciones, impulsos, etc. que se transformen como cuadrivectores.

Notar que las componentes de la velocidad $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ no se transforman según Lorentz. Esto es así porque el tiempo t cambia frente a transf. de Lorentz.

Definamos $$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{cuadrivector posición} \\ \leftarrow \text{tiempo propio (inv. relativista)} \end{matrix}$$

Debe ser un cuadrivector contravariante: cuadrivector velocidad:

$$U^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dx^0}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma_v c$$

$$d\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$$

el tiempo propio es t en el sistema que se mueve con $\mathbf{v}=v$

$$U^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma_v v^i$$

$$\Longrightarrow \boxed{U^\mu = \gamma_v\left(c, \underline{v}\right)}$$

Se transforma según Lorentz.

se transforma según la transf. de la velocidad.

y notar que $$U_\mu U^\mu = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(c^2-v^2\right) = c^2\,\frac{\cancel{c^2-v^2}}{\cancel{c^2-v^2}} = c^2$$

$\Rightarrow$ $\frac{U^\mu}{c}$ es un vector unitario tangente a la linea del universo de la particula.

Volviendo a derivar respecto a τ obtenemos el cuadrivector aceleración:

$$a^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$$

y $$a^\mu = \frac{dU^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma_v \frac{d}{dt}\left[\gamma_v\left(c, \underline{v}\right)\right] =$$

$$= \gamma_v \frac{d\gamma_v}{dt}\left(c, \underline{v}\right) + \gamma_v^2 \frac{d}{dt}\left(c, \underline{v}\right)$$

Veamos que $$U^\mu a_\mu = 0$$

Podriamos hacer la cuenta explicita, pero es mas fácil derivar $U_\mu U^\mu = c^2$

$$\frac{d}{d\tau}\left(U_\mu U^\mu\right) = 0 = 2\,U_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau} \quad \Longrightarrow \quad U_\mu a^\mu = 0$$

y los cuadrivectores velocidad y aceleración son ortogonales.

Ahora queremos hallar la generalización de la ec. de Newton

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\underline{v}\right)=\underline{F}$$

tq para $c\to\infty$ recobramos Newton. Tomemos

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\,U^{\mu}\right)=K^{\mu}$$

invariante y $\tau \xrightarrow[c\to\infty]{} t$

masa en reposo $(\equiv m_0)$

Fza. de Minkowski

Debe satisfacer $K^i \xrightarrow[c\to\infty]{} F^i$

i.e. $K^i = f(\gamma_v)F^i$

Definiendo

$$\boxed{p^{\mu}=m\,U^{\mu}}$$

cuadrivector momento

$$\Longrightarrow \quad \frac{dp^{\mu}}{d\tau}=K^{\mu} \qquad (1)$$

Las prop. de transformación de K^{μ} deben ser las mismas independientemente de la naturaleza de la fuerza. Consideremos el caso de fzas. electromagnéticas:

$$\underline{F}=q\,\underline{E}+\frac{q}{c}\,\underline{V}\times\underline{B}=\frac{q}{c}\left(c\underline{E}+\underline{V}\times\underline{B}\right)$$

Consideremos el cuadrivector

$$K^{\mu}=\frac{q}{c}F^{\mu\nu}U_{\nu}$$

$\mu=1)$ $\quad K^1=\frac{q}{c}\left(F^{10}U_0+F^{12}U_2+F^{13}U_3\right)=\gamma_v\frac{q}{c}\left(E_x c-B_zV_y+B_yV_z\right)$

$$=\gamma_v\frac{q}{c}\left(cE_x+\left(\underline{V}\times\underline{B}\right)_x\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{K^i=\gamma_v\,F^i} \qquad i=1,2,3$$

Veamos las componentes espaciales de (1)

Tenemos $\quad p^{\mu}=\left(p^0,\underline{p}\right)\quad$ con $\begin{cases}\underline{p}=\gamma_v m\underline{v}\\ p^0=\gamma_v mc\end{cases}$

$$\frac{d\underline{p}}{d\tau} = \frac{d\underline{p}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \cancel{\gamma_v}\,\frac{d\underline{p}}{dt} = \cancel{\gamma_v}\,\underline{F}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{F}} \qquad \text{con} \qquad \boxed{\underline{p} = \gamma_v m \underline{v}}$$

Para un cuerpo libre de interacciones tenemos MRU

y en el límite $c \to \infty$ recobramos Newton.

Pero la componente temporal es nueva. Ahora tenemos

$$\frac{dp^0}{d\tau} = K^0$$

$p^0 = \gamma_v mc$, pero ¿cuánto vale K^0 en general? Tomemos

$$U_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} = U_\mu K^\mu = U_\mu \frac{d}{d\tau}(mU^\mu) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2} m U_\mu U^\mu\right)$$

$$= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2} mc^2\right) = 0$$

$$\Longrightarrow U_\mu K^\mu = 0 = \gamma_v\left(c\,K^0 - \underline{v}\cdot \gamma_v \underline{F}\right)$$

Luego

$$K^0 = \frac{\gamma_v}{c}\,\underline{v}\cdot\underline{F}$$

$$\Longrightarrow \boxed{K^\mu = \gamma_v\left(\frac{\underline{v}\cdot\underline{F}}{c}, \underline{F}\right)} \qquad \text{Fza. de Minkowski}$$

La componente temporal entonces queda

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{dp^0}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \cancel{\gamma_v}\,\frac{dp^0}{dt} = \cancel{\gamma_v}\,\frac{\underline{v}\cdot\underline{F}}{c}$$

Potencia (trabajo x u. de tiempo)

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\gamma_v mc^2\right) = \underline{v}\cdot\underline{F} = \underline{F}\cdot\frac{d\underline{x}}{dt}$$

Energía cinética

$$\Longrightarrow \boxed{E = \gamma_v mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (2)$$

$$y \qquad \boxed{p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \underline{p}\right)}$$

Notar que ahora puedo escribir $\underline{p} = \gamma_v m \underline{v} = \frac{E}{c^2} \underline{v}$

la inercia está dada por $\frac{E}{c^2}$ ($\neq$ clásica)

De la definición de p^μ se sigue que en relatividad especial, siempre que se conserva el momento (espacial), se conserva E.

¡E se conserva aún en choques inelásticos!*

* pero se viola la cons. de la masa. La masa total no es la suma de las masas de cada par

Veamos el invariante

$$p_\mu p^\mu = m^2 U_\mu U^\mu = m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$$

Se sigue además que

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

o

$$\boxed{E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} \quad (3)$$

energía en reposo

Para una partícula en reposo $\boxed{E = mc^2}$

y para una partícula con $m = 0$ (fotón) $\boxed{E = pc}$

Notar la relación entre el vector de Poynting y la densidad de momento electromagnético.

Desarrollando (3) por Taylor para $v/c \ll 1$

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

Ejemplos:

1) Veamos el mov. de una carga en un campo eléctrico uniforme: $\varphi = -E_0 x$

$(\underline{v} = v\hat{x})$

La ec. de movimiento es

$$\frac{d}{dt}(\gamma_v m v) = q E_0$$

$$\Rightarrow \gamma_v m v = q E_0 t + \cancel{\alpha} \qquad \alpha = 0 \text{ si } v(t=0) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = qE_0 t$$

y $$v^2 = \frac{q^2E_0^2t^2}{m^2c^2}\left(c^2-v^2\right) \Longrightarrow v = \frac{qE_0t/m}{\sqrt{1+\left(\frac{qE_0t}{mc}\right)^2}}$$

Volviendo a integrar

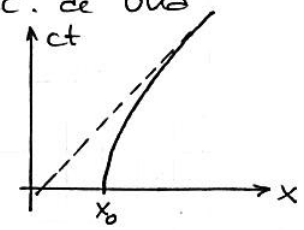
$\alpha = \frac{qE_0}{mc}$

$$\int_{x_0}^{x} dx' = x-x_0 = \int_0^t \frac{qE_0t'/m}{\sqrt{1+\left(\frac{qE_0t}{mc^2}\right)^2}}\,dt' =$$

$$= \int_0^t c\,\frac{\alpha t'}{\sqrt{c^2+\alpha^2t'^2}}\,dt'$$

$$\Longrightarrow \boxed{x = \frac{c}{\alpha}\left(\sqrt{c^2+\alpha^2t^2}-c\right)+x_0}$$

Es la ec. de una hiperbola



pues $$\left[(x-x_0)+\frac{c^2}{\alpha}\right]^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{\alpha^2}$$

2) Mov. de una carga en un campo magnético uniforme: Tomemos $\underline{B} = B_0\hat{x}$

Tenemos

ec. de movimiento

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_v m\underline{v}\right) = \frac{q}{c}\,\underline{v}\times\underline{B}$$

En $\hat{x}$ tenemos conservación de momento. En $\hat{y}, \hat{z}$ el vector velocidad precede alrededor de $\hat{x}$ con frecuencia

$$\boxed{\omega = \frac{qB_0}{mc\gamma_v}}$$

notar que $v^2 = cte$

Se sigue de $F_M = \frac{q}{c}\underline{v}\times\underline{B}$

y $\underline{v}\cdot\underline{F}=0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}\left(\gamma_v mc^2\right)$

$\Rightarrow \gamma_v = cte$