Campos de cargas en movimiento

Hasta ahora, vimos la evolución de campos electromagnéticos en el tiempo, o la mecánica de cargas en campos electromagnéticos prescriptos. El primer caso lo estudiamos con las ec. de Maxwell, el segundo con la extensión relativista de las ec. de la mecánica clásica. Sin embargo, el movimiento de las cargas genera campos electromagnéticos "propios" que no consideramos (la única excepción es el caso MHD, donde consideramos la ec. de inducción acoplada con la de cons. de momento; pero allí $v/c \ll 1$ y despreciamos las corr. de desplazamiento, luego no tenemos pérdidas por radiación).

Vimos también que al "prender" un dipolo, tenemos campos $\propto 1/r$ (campos de radiación) que se llevaban flujo de energía para $r \to \infty$. Olvidemos por el momento el acoplamiento y estudiemos el campo generado por cargas en movimiento.

Potenciales de Liénard-Wiechert

En el gauge de Lorentz $\quad \underline{\nabla} \cdot \underline{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

y

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} c\rho \\ \nabla^2 \underline{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\underline{J} \end{aligned}\right\} \quad \text{ó} \quad \Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu$$

Si las cond. de contorno son tales que $\varphi = \underline{A} = 0$ antes que el sist. empiece a evolucionar, las sol. se escriben en términos de los potenciales retardados (los avanzados describen, por ej., el caso en que se apagan campos).

$$G^+(\underline{r},t;\underline{r}',t') = \frac{\delta\left[t'-\left(t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\right]}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

y
$$\begin{cases} \varphi(\underline{r},t) = \int \dfrac{\rho(\underline{r}',t')\,\delta\left[t'-\left(t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\right]}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, dt'\, d^3r' \\ \underline{A}(\underline{r},t) = \int \dfrac{\underline{J}(\underline{r}',t')\,\delta\left[t'-\left(t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\right]}{c\,|\underline{r}-\underline{r}'|}\, dt'\, d^3r' \end{cases}$$

o $\quad A^\mu(x) = \frac{1}{c}\int J^\mu(x')\, G^+(x,x')\, d^4x'$

Consideremos una carga en movimiento $\underline{r}' = \underline{r}_0(t')$ (en una formulación covariante, $t' = \tau$ (tiempo propio))

$$\Rightarrow \rho(\underline{r}',t') = q\,\delta[\underline{r}'-\underline{r}_0(t')]$$

y por la ec. de continuidad $\quad \underline{\nabla}\cdot\underline{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$

$$\Rightarrow \underline{J}(\underline{r}',t') = q\,\dot{\underline{r}}_0(t')\,\delta[\underline{r}'-\underline{r}_0(t')] \qquad \text{con } \dot{\underline{r}}_0 = \frac{d\underline{r}_0}{dt'}$$

Notar que por ahora $\underline{r}_0(t')$ es una función prescripta.

Reemplazando

$$\varphi(\underline{r},t) = \int q\, \frac{\delta(\underline{r}'-\underline{r}_0(t'))\,\delta\left[t'-\left(t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\right]}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, dt'\, d^3r' =$$

$$= \int q\, \frac{\delta\left[t'-\left(t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}_0(t')|}{c}\right)\right]}{|\underline{r}-\underline{r}_0(t')|}\, dt'$$

Veamos que $\quad \delta(f(x)) = \dfrac{\delta(x-f^{-1}(0))}{|f'(f^{-1}(0))|}$ $\quad$ ceros de f

Basta ver que

$$\int \rho(x)\,\delta(f(x))\,dx = \int \rho(f^{-1}(u))\,\delta(u)\,\frac{du}{|f'(f^{-1}(u))|} = \frac{\rho(f^{-1}(0))}{|f'(f^{-1}(0))|}$$

si f tiene una sola raiz

$u = f(x)$

$du = |f'(x)|dx$ $\quad$ pues $\delta(x) = \delta(-x)$ ó

$$\int \delta(x)dx = 1$$

$$\int \delta(\alpha x)dx = \int \delta(x)\frac{dx}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|}$$

Tenemos $\quad f(t') = t' - t + \dfrac{|\underline{r}-\underline{r}_0(t')|}{c} = 0$

$$\Longrightarrow \quad c(t-t') = |\underline{r}-\underline{r}_0(t')|$$

La señal que sale en t' de $\underline{r}_0(t')$ llega a $\underline{r}$ después de $\Delta t = \frac{|\underline{r}-\underline{r}_0(t')|}{c}$. Calculemos la derivada

$$f'(t') = \frac{\partial f}{\partial t'} = 1 + \underbrace{\frac{\underline{r}-\underline{r}_0(t')}{|\underline{r}-\underline{r}_0(t')|}}_{=\hat{n}} \cdot \left(-\underbrace{\frac{\overbrace{\underline{v}(t')}^{\dot{\underline{r}}_0(t')}}{c}}_{=\underline{\beta}<1}\right)$$

$$\Longrightarrow |f'(t')| = 1 - \hat{n}(t')\cdot\underline{\beta}(t')$$

Reemplazando

$$\varphi(\underline{r},t) = \int q \, \frac{\delta(t'-f^{-1}(0))}{|\underline{r}-\underline{r}_0(t')|(1-\hat{n}\cdot\underline{\beta})} \, dt' =$$

$$= \frac{q}{|\underline{r}-\underline{r}_0(t')|(1-\hat{n}\cdot\underline{\beta})}\Bigg|_{t_{ret}} \longrightarrow$$

tiempo retardado: dados $(t,\underline{r})$, el tiempo que cumple $c(t-t') = |\underline{r}-\underline{r}_0(t')|$

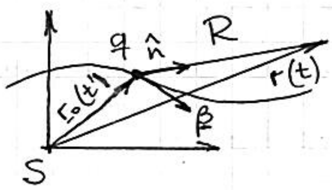
Tomando $R = |\underline{r}-\underline{r}_0(t')|$

$$\Longrightarrow \boxed{\varphi(\underline{r},t) = \frac{q}{R(1-\hat{n}\cdot\underline{\beta})}\Bigg|_{t_{ret}}}$$

Por el mismo camino

$$\boxed{\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{q}{R(1-\hat{n}\cdot\underline{\beta})}\,\underline{\beta}\Bigg|_{t_{ret}}}$$

Potenciales de Liénard - Wiechert



$\hat{n} \to$ es el versor en la dirección pto. fuente (en t_{ret}) - pto. campo (en t).

$\underline{\beta} \to \frac{v}{c}$ de la fuente en t_{ret}.

Calculemos los campos $\underline{E}$ y $\underline{B}$.

Tenemos

$$\begin{cases} \underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \\ \underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A} \end{cases}$$

pero t' (y $\underline{r}_0$) son funciones de $\underline{r}$ y t. Se obtiene*

$$\boxed{\underline{E} = \left.\frac{q(\hat{n}-\underline{\beta})}{\gamma^2(1-\underline{\beta}\cdot\hat{n})^3R^2}\right|_{t_{ret}} + \left.\frac{q}{c}\frac{\hat{n}\times[(\hat{n}-\underline{\beta})\times\dot{\underline{\beta}}]}{(1-\underline{\beta}\cdot\hat{n})^3R}\right|_{t_{ret}}}$$

campo de velocidades   campo de radiación

y $\boxed{\underline{B} = \hat{n}\times\underline{E}\Big|_{t_{ret}}}$

Notar que $\hat{n}$, β, γ y R están evaluados en $t_{ret} = t'$ tq

$$c(t-t') = |\underline{r}-\underline{r}_0(t')|$$

* Hay que usar $\quad R = |\underline{r}-\underline{r}_0(t')| = c(t-t')$

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial t} = c\left(1-\frac{\partial t'}{\partial t}\right) = \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = \underbrace{\frac{\underline{r}-\underline{r}_0(t)}{|\underline{r}-\underline{r}_0(t')|}}_{\hat{n}}\cdot\Big(-\overbrace{\frac{d\underline{r}_0}{dt'}}^{\underline{v}(t')}\Big)\frac{\partial t'}{\partial t} = -\hat{n}\cdot\underline{v}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1-\hat{n}\cdot\underline{\beta}}$$

Además

$$\Rightarrow \underline{\nabla}t' = -\frac{1}{c}\underline{\nabla}R(t') = -\frac{1}{c}\Big(\overbrace{\frac{\partial R}{\partial t'}}^{-\hat{n}\cdot\underline{\beta}}\underline{\nabla}t' + \hat{n}\Big)$$

$$\Longrightarrow \nabla t' = -\frac{\hat{n}}{c(1-\hat{n}\cdot\underline{\beta})}$$

Tenemos dos términos en los campos: el primero depende de $\underline{r}_0$ y $\underline{\beta}$ y decae como $1/R^2$.
El segundo depende de $\dot{\beta}$ y decae como $1/R$. Este término está presente solo si el movimiento es acelerado, y lleva energía al infinito $\Longrightarrow$ campo de radiación.

Tenemos también dos tipos de efectos relativistas: los que tienen que ver con el ángulo formado por $\underline{\beta}$ y $\dot{\underline{\beta}}$ (numerador), y los que tienen que ver con la transf. del sist. de referencia de la carga al del observador y van como $1-\underline{\beta}\cdot\hat{n}$ (denominador).

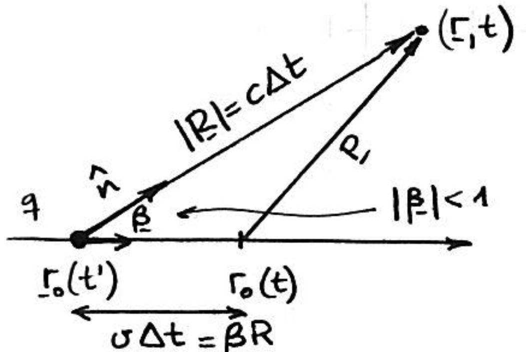
Veamos las prop. del <u>campo de velocidades</u>:

+ Para una carga en reposo:

$$\underline{E} = \frac{q\hat{n}}{R^2} \qquad \text{Ley de Coulomb}$$

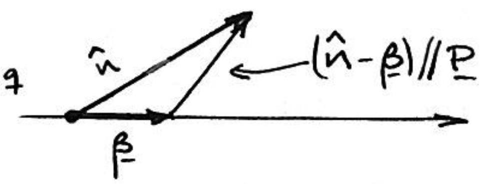
+ Para una carga en mov. uniforme:

$$\underline{E} = \left.\frac{q(\hat{n}-\underline{\beta})}{\gamma^2(1-\underline{\beta}\cdot\hat{n})^3R^2}\right|_{t_{ret}}$$



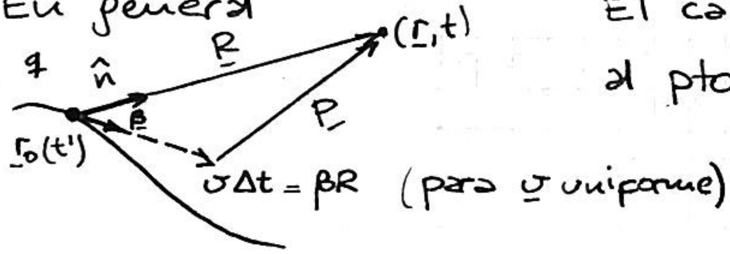
Veamos el vector

$$R(\hat{n}-\underline{\beta}) = \underline{R} - R\underline{\beta} =$$
$$= \underline{R} - R\frac{\underline{v}}{c} =$$
$$= \underline{R} - \underline{v}\Delta t = \underline{P}$$



Luego el campo es radial con la posición de la carga en t.

+ En general



El campo es radial respecto al pto. en el que estaría la carga con $\underline{v}$ uniforme.

Veamos ahora el <u>campo de aceleración</u>:

Tenemos

$$\underline{E}_{rad} = \left.\frac{q\,\hat{n}\times\left[(\hat{n}-\underline{\beta})\times\dot{\underline{\beta}}\right]}{c\,(1-\underline{\beta}\cdot\hat{n})^3 R}\right|_{t_{ret}}$$

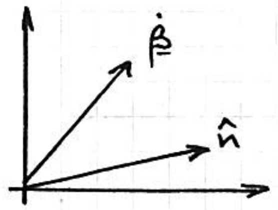
y $\qquad \underline{B}_{rad} = \hat{n}\times\underline{E}_{rad}$

$\Rightarrow$ $\underline{E}_{rad}$, $\underline{B}_{rad}$ y $\hat{n}$ son perpendiculares.

Para bajas velocidades $(\beta\approx 0)$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{E}_{rad} = \left.\frac{q}{c}\,\frac{\hat{n}\times(\hat{n}\times\dot{\underline{\beta}})}{R}\right|_{t_{ret}}}$$

El campo eléctrico esta polarizado en el plano que contiene a $\dot{\underline{\beta}}$ y $\hat{n}$. De hecho



$$\hat{n}\times(\hat{n}\times\dot{\underline{\beta}}) = -\left[\dot{\underline{\beta}} - (\dot{\underline{\beta}}\cdot\hat{\underline{n}})\,\hat{n}\right]$$

$$\Rightarrow \underline{E}_{rad} \propto -\dot{\underline{\beta}}_{\perp}$$