Potencia irradiada

Tenemos el flujo instantáneo de energía

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi}\, \underline{E} \times \underline{B} = \frac{c}{4\pi}\, \underline{E}_{rad} \times \left(\hat{n} \times \underline{E}_{rad}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\underline{S} = \frac{c}{4\pi} \left| \underline{E}_{rad} \right|^2 \hat{n}}$$

luego la potencia irradiada es

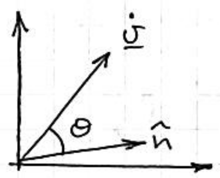
$$dP = \underline{S}\cdot d\underline{A} \qquad \text{y} \qquad d\underline{A} = R^2\, d\Omega\, \hat{n}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = R^2\, \underline{S}\cdot\hat{n} = \frac{c}{4\pi}\left|R\, \underline{E}_{rad}\right|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\left|\frac{\hat{n}\times(\hat{n}-\underline{\beta})\times\dot{\underline{\beta}}}{(1-\underline{\beta}\cdot\hat{n})^3}\right|^2}$$

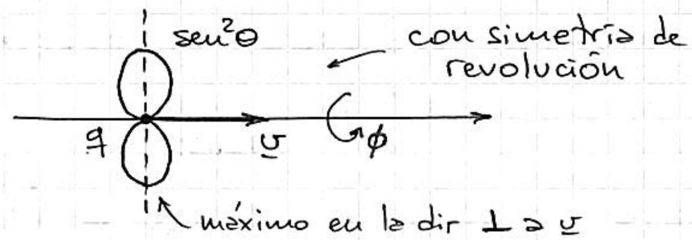
Para bajas velocidades

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\left|\hat{n}\times(\hat{n}\times\dot{\underline{\beta}})\right|^2 = \frac{q^2}{4\pi c^3}\left|\dot{\underline{v}}\right|^2 \operatorname{sen}^2\theta$$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3}\left|\dot{\underline{v}}\right|^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

Supongamos $\underline{\beta} \parallel \dot{\underline{\beta}}$ (partícula acelerada en la dirección de movimiento) $\Rightarrow$ el patrón de radiación es:



Integrando sobre el ángulo sólido

$$\boxed{P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\left|\dot{\underline{v}}\right|^2} \qquad \text{Fórmula de Larmor}$$

En el caso relativista, debemos tener cuidado pues $\frac{dP}{d\Omega}$ es energía irradiada por unidad de área y de tiempo en el sist. del observador, y queremos la potencia irradiada por la fuente (ie., por u. de tiempo en el sist. de la fuente).

Tenemos

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dE}{dt\, d\Omega} = R^2\, \underline{S}\cdot\hat{n}$$

y queremos

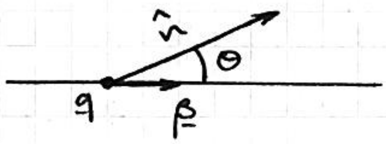
$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{dE}{dt\,d\Omega}\frac{dt}{dt'} = R^2\,\underline{S}\cdot\hat{n}\,\frac{dt}{dt'} = R^2\,\underline{S}\cdot\hat{n}\,(1-\underline{\beta}\cdot\hat{n})$$

$\Rightarrow$ la potencia irradiada por la partícula es

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\,\frac{|\hat{n}\times(\hat{n}-\underline{\beta})\times\dot{\underline{\beta}}|^2}{(1-\underline{\beta}\cdot\hat{n})^6}\,(1-\underline{\beta}\cdot\hat{n})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\,\frac{|\hat{n}\times(\hat{n}-\underline{\beta})\times\dot{\underline{\beta}}|^2}{(1-\underline{\beta}\cdot\hat{n})^5}}$$

Volviendo al ejemplo con $\dot{\underline{\beta}} \parallel \underline{\beta}$ (mov. rectilíneo)



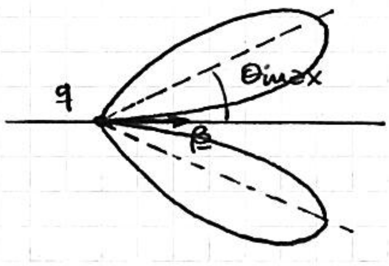
$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\,\frac{|\hat{n}\times(\hat{n}-\cancel{\underline{\beta}})\times\dot{\underline{\beta}}|^2}{(1-\underline{\beta}\cdot\hat{n})^5} =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi c}\,|\dot{\underline{\beta}}|^2\,\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$

Tomemos $x=\cos\theta$ y busquemos máximos de

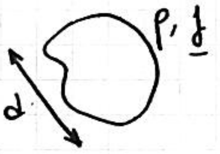
$$f(x) = \frac{1-x^2}{(1-\beta x)^5}$$

Sale $\quad x_{max} = \cos\theta_{max} = \dfrac{\sqrt{1+15\beta^2}-1}{3\beta} \xrightarrow[\beta\to 1]{} 1$



La radiación queda confinada a un cono delgado en la dirección de movimiento.
(cuando es por frenado x colisiones Coulomb $\to$ Bremsstrahlung)

<u>Radiación de fuentes localizadas</u>



Consideremos una fuente localizada y veamos los campos de radiación lejos (como caen como $1/R$ serán los dominantes). Haciendo análisis de

Fourier $\begin{cases} \rho(\underline{r}',t') = \rho(\underline{r}')\, e^{-i\omega t'} \\ \underline{j}(\underline{r}',t') = \underline{j}(\underline{r}')\, e^{-i\omega t'} \end{cases}$

Dado $\underline{A}$, podemos obtener $\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$.

Luego, lejos de las fuentes $\underline{\nabla} \times \underline{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \cancel{\frac{4\pi}{c}\underline{j}}$

$$\Rightarrow -\frac{i\omega}{c}\underline{E} = \underline{\nabla} \times \underline{B} \quad \text{y} \quad \underline{E} = \frac{i}{k}\underline{\nabla} \times \underline{B}$$

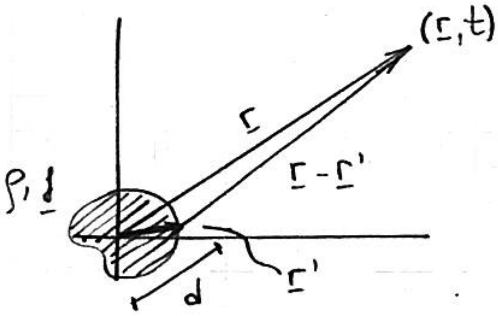
La sol. de $\underline{A}$ está dada por los potenciales retardados

$$\underline{A} = \frac{1}{c}\int d^3r'\, d^3t' \;\frac{\underline{j}(\underline{r}',t')\;\delta\left[t' - \left(t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\right]}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r' \;\frac{\underline{j}(\underline{r}')\; e^{-i\omega\left(t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}$$

← retardo
Tiempo diferente t_{ret} para cada pto. de la fuente.

Consideremos:



para $d \ll r \ll \lambda$ tenemos la región "cercana", donde vale cuasiestacionario.

Veamos $d \ll \lambda \ll r$ (región de campo lejano o de radiación).

Tomando desarrollo multipolar de

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{e^{-i\omega t}}{c}\int d^3r' \;\frac{\underline{j}(\underline{r}')\; e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

tenemos que desarrollar

$$\frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = 4\pi i k \sum_{\ell=0}^{\infty} j_\ell(kr_<)\, h_\ell^{(1)}(kr_>) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\theta'\phi')\, Y_{\ell m}(\theta\phi)$$

con $j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{\ell+1/2}(x)$, $h_\ell^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left[J_{\ell+1/2}(x) + i N_{\ell+1/2}(x)\right]$

Esto lleva a un desarrollo en términos de func. esféricas de Bessel y armónicos esféricos. Pero veamos los términos de orden mas bajo por otro camino.

Aproximando

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \approx \frac{1}{|\underline{r}|} = \frac{1}{r}$$

y en $e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}$ $\quad |\underline{r}-\underline{r}'| \approx r - \hat{n}\cdot\underline{r}' + \dots$

Luego

$$e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|} \approx e^{ik(r-\hat{n}\cdot\underline{r}')}$$

$$\Rightarrow \boxed{A(\underline{r},t) = \frac{e^{+i(kr-\omega t)}}{cr}\int \underline{j}(\underline{r}')\, e^{-ik\hat{n}\cdot\underline{r}'}\, d^3r'} \qquad (1)$$

*Hasta acá solo usamos $r \gg d$

Luego para $d \ll \lambda$ podemos tomar

$$e^{-ik\hat{n}\cdot\underline{r}'} \approx 1 - ik\hat{n}\cdot\underline{r}' + \dots$$

Tenemos $|k\hat{n}\cdot\underline{r}'| \ll 1$

$\sim kd \ll 1$

ó $\quad d \ll \frac{\lambda}{2\pi}$

Término dipolar eléctrico:

Tomemos, a orden cero

$$\underline{A}(\underline{r},t) \approx \frac{e^{+i(kr-\omega t)}}{cr}\int \underline{j}(\underline{r}')\, d^3r'$$

Veamos

$$\int j_i\, dV = \int (\partial_\ell r_i)\, j_\ell\, dV = \cancel{\int \partial_\ell (j_\ell r_i)\, dV} - \int r_i\, \partial_\ell j_\ell\, dV$$

pero por la ec. de continuidad $\quad \underline{\nabla}\cdot\underline{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \underline{\nabla}\cdot\underline{j} = i\omega\rho$

$$\Rightarrow \underline{A}(\underline{r},t) \approx -\frac{e^{+i(kr-\omega t)}}{cr}\, i\omega \underbrace{\int \underline{r}'\rho(\underline{r}')\, d^3r'}_{\underline{p}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{A}^{(0)}(\underline{r},t) = -ik\underline{p}\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}}$$

Luego

$$\underline{B}^{(0)} = \underline{\nabla}\times\underline{A}^{(0)} = k^2(\hat{n}\times\underline{p})\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right)$$

pero $\lambda \ll r \Rightarrow \frac{1}{kr} \ll 1$

(lejos domina el campo de radiación que cae $\propto 1/r$)

$$\Rightarrow \boxed{\underline{B}^{(0)}(\underline{r},t) \simeq k^2(\hat{n}\times\underline{p})\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}}$$

y $$\underline{E}^{(0)}(\underline{r},t) = \frac{i}{k}\,\underline{\nabla}\times\underline{B}$$

$$\Rightarrow \underline{E}^{(0)} = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\left\{ k^2(\hat{u}\times\underline{p})\times\hat{n} + \left[3\hat{n}(\hat{n}\cdot\underline{p})-\underline{p}\right]\left(\frac{1}{r^2}-\frac{ik}{r}\right)\right\}$$

y la parte de radiación es

$$\boxed{\underline{E}^{(0)}(\underline{r},t) = k^2\,(\hat{n}\times\underline{p})\times\hat{n}\;\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} = \underline{B}\times\hat{u}}$$