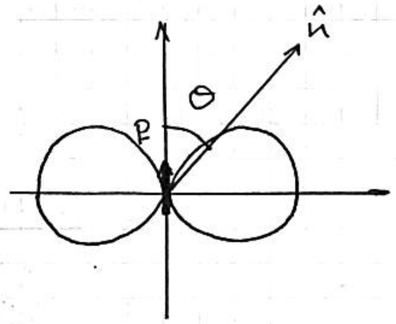
Calculemos la potencia irradiada. Teníamos

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \underline{S} \cdot \hat{n}$$

y en el caso complejo nos interesa

$$\langle \underline{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\left(\underline{E} \times \underline{B}^* \right) = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\left[(\underline{B} \times \hat{n}) \times \underline{B}^* \right] = \frac{c}{8\pi} |\underline{B}|^2 \hat{n} =$$

$$= \frac{c}{8\pi} \frac{k^4}{r^2} |\hat{n} \times \underline{p}|^2 \hat{n}$$



$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^4}{8\pi} |\hat{n} \times \underline{p}|^2}$$

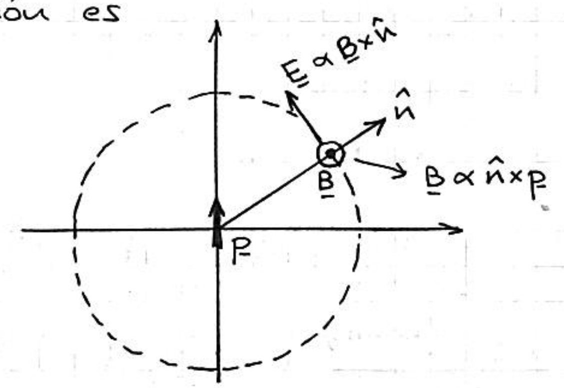
ó

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^4}{8\pi} |\underline{p}|^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

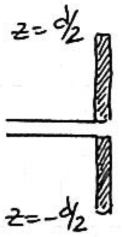
e integrando sobre el ángulo sólido $\boxed{P = \frac{ck^4}{3} |\underline{p}|^2}$ pot. irradiada $\propto \omega^4$

(en el visible, la radiación en el rojo es menor y en el violeta mayor; comparar con scattering de Rayleigh).

La polarización del campo de radiación es



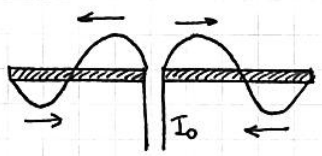
Ejemplo: antena.



Tenemos ceros de $\underline{j}$ en los extremos. En gral. podemos descomponer

$$\underline{j} = j_0 \operatorname{sen}\Big[\overbrace{k\left(\frac{d}{2} - |z|\right)}^{\frac{kd}{2}\left(1-\frac{2|z|}{d}\right)}\Big]\, e^{-i\omega t}\, \delta(x)\,\delta(y)\,\hat{z}$$

Esta expresión puede reemplazarse en (1) e integrar para obtener $\underline{A}$. Pero veamos la rad. dipolar en el caso $kd \ll 1$. Tenemos



$$\underline{j} \simeq I_0 \left(-\frac{2|z|}{d} + 1\right) e^{-i\omega t}\, \delta(x)\,\delta(y)\,\hat{z}$$

y de la ec. de continuidad

$$i\omega\rho = \partial_z j_z \Rightarrow \rho = i I_0 \frac{2}{d\omega}\frac{z}{|z|} e^{-i\omega t}\,\delta(x)\delta(y)$$

$$= \rho(\underline{r})\, e^{-i\omega t}$$

donde $\rho(\underline{r}) = \dfrac{i2I_0}{\omega d}\, \mathrm{sg}(z)\,\delta(x)\,\delta(y)$

Luego $$\underline{p} = \int \underline{r}'\rho(\underline{r}')\, d^3r' = \int_{-d/2}^{d/2} \hat{z} z\, \mathrm{sg}(z) \frac{i2I_0}{d\omega}\, dz =$$

$$= \hat{z}\,\frac{i4I_0}{d\omega}\int_0^{d/2} z\, dz = \frac{i I_0 d}{2\omega}\,\hat{z}$$

$$\Longrightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^4}{8\pi}\,\frac{I_0^2 d^2}{4\omega^2}\operatorname{sen}^2\theta = \frac{I_0^2 k^2 d^2}{32\pi c}\operatorname{sen}^2\theta$$

y $\boxed{P = \dfrac{I_0^2 k^2 d^2}{12c}}$ ← a I_0 fijo crece como ω^2

Términos dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico

Al orden siguiente en la expansión

$$e^{-ik\hat{n}\cdot\underline{r}'} \simeq 1 - ik\hat{n}\cdot\underline{r}' + \ldots$$

tenemos

$$\underline{A}(\underline{r},t) \simeq \frac{1}{c}\int \underline{j}(\underline{r}')\left(-ik\hat{n}\cdot\underline{r}'\right) d^3r'\; \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

$$= -\frac{ik\, e^{i(kr-\omega t)}}{cr}\int \underline{j}(\underline{r}')(\hat{n}\cdot\underline{r}')\, d^3r'$$

Veamos ahora

$$\int j_i n_\ell r_\ell \, dV = n_\ell \Big(\overbrace{\int j_i r_\ell \, dV}^{\text{tensor}} \Big) =$$

$$= n_\ell \left[\frac{1}{2} \underbrace{\int (j_i r_\ell - j_\ell r_i) dV}_{\text{antisimétrico}} + \frac{1}{2} \underbrace{\int (j_i r_\ell + j_\ell r_i) dV}_{\text{simétrico}} \right]$$

Para la parte antisimétrica, definiendo

$$\underline{m} = \frac{1}{2c} \int (\underline{r}' \times \underline{j}) \, d^3 r'$$ Momento dipolar magnético

$$\Rightarrow \boxed{\underline{A}^{(M)}(\underline{r}, t) = ik \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} (\hat{n} \times \underline{m})}$$

pues

$$\hat{n} \times \underline{m} = \frac{1}{2c} \varepsilon_{i\ell p} n_\ell \overbrace{\int \varepsilon_{pqr} r_q j_r \, dV}^{m_p} = \frac{1}{2c} \varepsilon_{pi\ell} \varepsilon_{pqr} n_\ell \int r_q j_r \, dV$$

$$= \frac{1}{2c} n_\ell \int (j_\ell r_i - r_i j_\ell) dV$$

Falta determinar $\underline{B}$ y $\underline{E}$ para el término de radiación dipolar magnética. Tenemos que calcular

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A} \qquad y \qquad \underline{E} = \frac{i}{k} \underline{\nabla} \times \underline{B} .$$

Pero notar que $\underline{A}^{(M)}$ se parece a $\underline{B}^{(0)}$ (dipolar eléctrico) tomando el cambio $\underline{m} \longrightarrow \underline{p} \Rightarrow \underline{B}^{(M)}$ es proporcional a $\underline{E}^{(0)}$

$$\underline{B}^{(M)} = \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \left\{ k^2 (\hat{n} \times \underline{m}) \times \hat{n} + [3 \hat{n} (\hat{n} \cdot \underline{m}) - \underline{m}] \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) \right]$$

y la parte de radiación es

$$\boxed{\underline{B}^{(M)}_{(\underline{r}, t)} = k^2 (\hat{n} \times \underline{m}) \times \hat{n} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}}$$

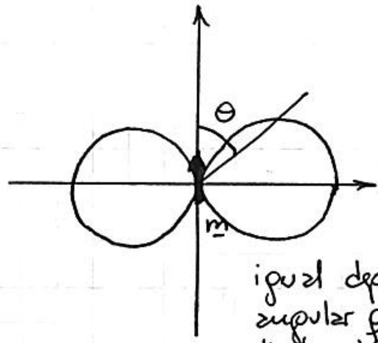
Para el campo eléctrico obtenemos

$$\underline{E}^{(M)} = -k^2 (\hat{n} \times \underline{m}) \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right)$$

y la parte de radiación es

$$\boxed{E^{(M)}(\underline{r},t) = -k^2(\hat{n}\times\underline{m})\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}}$$

La potencia irradiada ahora es

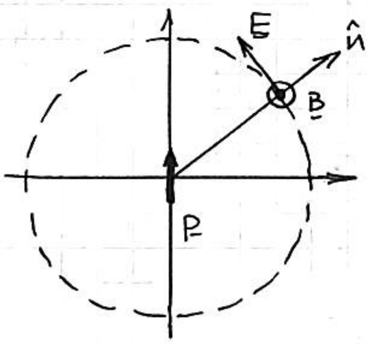


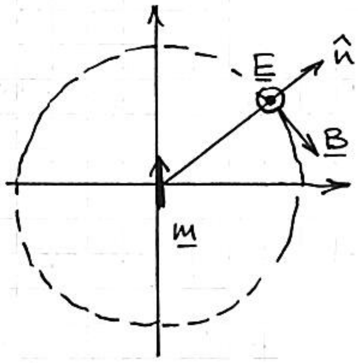
$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^4}{8\pi}|\hat{n}\times\underline{m}|^2}$$

o $$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^4}{8\pi}|\underline{m}|^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

igual dependencia angular que el dipolo eléctrico.

pero la polarización es diferente





Veamos finalmente la parte simétrica (término cuadrupolar eléctrico): tenemos

$$\frac{1}{2}\int(j_i r_l + j_l r_i)\,dV = \frac{1}{2}\int(\partial_k r_i)j_k r_l\,dV + \frac{1}{2}\int j_l r_i\,dV =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}\int\partial_k(r_i j_k r_l)\,dV} - \frac{1}{2}\int r_i r_l \underbrace{\partial_k j_k}_{\nabla\cdot\underline{j}}\,dV - \cancel{\frac{1}{2}\int j_k r_i \delta_{lk}} + \cancel{\frac{1}{2}\int j_l r_i\,dV}$$

pero $\nabla\cdot\underline{j} = i\omega\rho$

$$\Longrightarrow A_i^{(E)}(\underline{r},t) = +\frac{ik\,e^{i(kr-\omega t)}}{2cr}\,i\omega\underbrace{\left(\int\rho(\underline{r}')\,r_i' r_l'\,d^3r'\right)}_{C_{il}}n_l$$

y teníamos

$$Q_{ij} = 3C_{ij} - C_{ll}\delta_{ij}$$

$$\Longrightarrow A_i^{(E)}(\underline{r},t) = -\frac{k^2}{2}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\frac{1}{3}(Q_{ij} + C_{ll}\delta_{ij})n_j$$

tensor identidad

$\hat{n}$ //

ó $$\boxed{\underline{A}^{(E)}(\underline{r},t) = -\frac{k^2}{6}\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\left(\underline{\underline{Q}} + \mathrm{tr}(\underline{\underline{C}})\,\underline{\underline{I}}\right)\cdot\hat{n}}$$

La parte solo de radiación de los campos $\underline{E}$ y $\underline{B}$ para el término cuadrupolar eléctrico las podemos calcular fácilmente haciendo

radiación

$$\underline{B}^{(E)} = \nabla\times\underline{A} = ik\,\hat{n}\times\underline{A}$$

$$\Rightarrow \boxed{B^{(E)}(\underline{r},t) = -\frac{ik^3}{6}\,\hat{n}\times(\underline{\underline{Q}}\cdot\hat{n})\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}}$$

y $$\underline{E}^{(E)} = \frac{i}{k}\nabla\times\underline{B} = \underline{B}^{(E)}\times\hat{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{E^{(E)}(\underline{r},t) = -\frac{ik^3}{6}\left[\hat{n}\times(\underline{\underline{Q}}\cdot\hat{n})\right]\times\hat{n}\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}}$$

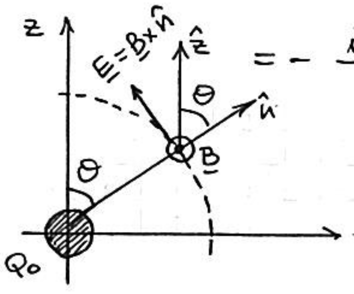
La potencia irradiada es

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^6}{288\pi}\left|\hat{n}\times(\underline{\underline{Q}}\cdot\hat{n})\right|^2}$$

<u>Ejemplo</u>: consideremos una esfera con carga Q_0 que oscila con frecuencia ω. Por simetría no tiene momentos dipolares. Tenemos

$$\underline{\underline{Q}} = Q_0\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_0\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} + Q_0\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{B} = -\frac{ik^3}{6}\,Q_0\,\hat{n}\times\left(\cancel{-\frac{1}{2}\hat{n}} + \frac{3\hat{z}(\hat{z}\cdot\hat{n})}{2}\right)\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} =$$



$$= -\frac{ik^3}{4}\,Q_0\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\,\hat{\varphi}$$

va como ω^6 en lugar de ω^4

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi}\,\frac{k^6 Q_0^2}{16}\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta}$$