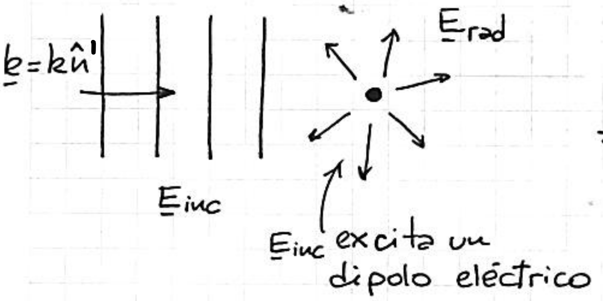
Scattering de Rayleigh

Consideremos una onda plana monocromática que incide sobre una molécula:



$$\underline{E}_{inc} = \underline{E}_0 \, e^{i(k\hat{n}'\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

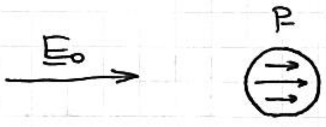
$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{E}_{rad} = k^2 \dfrac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} (\hat{n}\times\underline{p})\times\hat{n} \\[2ex] \underline{B}_{rad} = k^2 \dfrac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} (\hat{n}\times\underline{p}) \end{cases}$$

Notar que $\underline{E}_{rad}$, $\underline{B}_{rad}$ se propagan en todas las direcciones.

La sección eficaz de scattering se define como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\dfrac{dP_{rad}}{d\Omega}}{\dfrac{dP_{inc}}{d\Omega}} = \frac{\dfrac{c\cancel{r^2}}{8\pi}\dfrac{k^4}{\cancel{r^2}}\left|(\hat{n}\times\underline{p})\times\hat{n}\right|}{\dfrac{c}{8\pi}\left|\underline{E}_0\right|^2} = \frac{k^4}{E_0^2}\left|(\hat{n}\times\underline{p})\times\hat{n}\right|^2$$

Ejemplo: Esfera dieléctrica en un campo $\underline{E}$



$$\underline{p} = \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right) a^3 \underline{E}_0$$

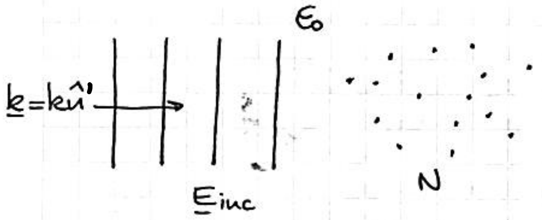
Si $\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \underline{p} = \underline{p}_0 e^{i\omega t}$

y
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4 a^6}{E_0^2}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 \left|(\hat{n}\times\underline{E}_0)\times\hat{n}\right|^2$$

Definiendo $\underline{E}_0 = E_0 \hat{e}$ ← dir. de polarización (puede ser complejo)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 a^6 \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 \left|(\hat{n}\times\hat{e})\times\hat{n}\right|^2}$$
← sección eficaz de scattering de una esfera dieléctrica

Consideremos ahora el problema mas general en el que tenemos N moléculas en un medio con permitividad eléctrica ϵ_0.



Las moleculas adquieren momento dipolar $\underline{p} = \chi \underline{E}$

$$\Rightarrow \underline{D} = \underline{E} + 4\pi \underline{P} = \underbrace{(1+4\pi\chi)}_{\epsilon = \epsilon_0 + \delta\epsilon} \underline{E}$$

Podemos pensar que en las moléculas tenemos

$$\epsilon = \epsilon_0 + \delta\epsilon \quad \text{con} \quad \delta\epsilon = 4\pi\chi \sum_{i=1}^{N} \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$$

De las ec. de Maxwell sin fuentes

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \Longrightarrow \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \underline{\nabla} \times \underline{B}$$

y de

$$\underline{\nabla} \times \underline{H} \underset{\mu=1}{=} \underline{\nabla} \times \underline{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \Rightarrow \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{E}\epsilon_0 = -\frac{\epsilon_0}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{D}}{\partial t^2} \quad (1)$$

De $\underline{\nabla} \cdot \underline{D} = 0 \Longrightarrow \nabla^2 \underline{D} = -\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{D} \quad (2)$

Sumando (1) y (2)

$$\boxed{\left(\nabla^2 - \frac{\epsilon_0}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{D} = \underbrace{-\nabla \times \nabla \times \left(\underline{D} - \epsilon_0 \underline{E}\right)}_{\text{fuente}}}$$

Tenemos una ec. de ondas inhomogénea.

Para $\epsilon_0 = 1$ $\underline{D} - \underline{E} = 4\pi \underline{P}$
$\Rightarrow$ la fuente es el scattering por los dipolar inducidos

La solución es

$$\underline{D} = \underset{\text{sol. homogénea}}{\underline{D}^{(0)}} + \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \left(\underline{D} - \epsilon_0 \underline{E}\right) d^3 r'$$

Lejos de la región de scattering, podemos aproximar

$$1/|\underline{r}-\underline{r}'| \approx \frac{1}{r} \quad \text{y} \quad k|\underline{r}-\underline{r}'| \approx kr - k\hat{n}\cdot\underline{r}'$$

$$\nabla\times = i\underline{k}\times = ik\hat{n}\times$$

$$\Rightarrow \quad \underline{D} = \underline{D}^{(0)} + \frac{k^2}{4\pi r}\int e^{-ik\hat{n}\cdot\underline{r}'}\,\hat{n}\times\left(\underline{D}-\epsilon_0\underline{E}\right)\times\hat{n}\ d^3r' \ .\ e^{i(kr-\omega t)}$$

onda plana incidente
(sol. homogenea)

scattering
(comparar con $\underline{E}_{rad} = \frac{k^2 e^{i(kr-\omega t)}}{r}(\hat{n}\times\underline{p})\times\hat{n}$)

Además, $\underline{D} = (\epsilon_0 + \delta\epsilon)\,\underline{E}$ con $\delta\epsilon \ll \epsilon$.

$$\Rightarrow \quad \underline{D}-\epsilon_0\underline{E} = \delta\epsilon\,\underline{E} = \frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0+\delta\epsilon}\,\underline{D} \approx \frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0}\,\underline{D}^{(0)}$$

a orden mas bajo en $\delta\epsilon$

Veamos solo la parte de radiación (scattering)

$$\underline{D} = \underline{D}^{(0)} + \underline{D}_{rad}$$

amplitud de la onda plana

con

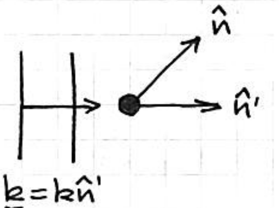
$$\underline{D}_{rad} \approx \frac{k^2 e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r}\int e^{-ik\hat{n}\cdot\underline{r}'}\,\frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0}\left(\hat{n}\times\underline{D}^{(0)}(\underline{r}')\right)\times\hat{n}\ d^3r' =$$

$$= \frac{k^2 e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r}\left(\hat{n}\times\underline{E}_0\right)\times\hat{n}\int \delta\epsilon(\underline{r}')\,e^{ik\delta\hat{n}\cdot\underline{r}'}\,d^3r'$$

$\delta\hat{n} = \hat{n}'-\hat{n}$

usando
$$\begin{cases} \underline{D}_{inc}(\underline{r}) = \underline{D}^{(0)} = \underline{D}_0\, e^{ik\hat{n}'\cdot r'} \\ \underline{E}_{inc}(\underline{r}) = \underline{E}_0\, e^{ik\hat{n}'\cdot r'} \end{cases} \quad y \quad \begin{array}{l} \underline{D}_{inc}(\underline{r},t) = D_{inc}(r)\,e^{-i\omega t} \\ \underline{D}_0 = \epsilon_0\underline{E}_0 \end{array}$$

Notar que $\delta\hat{n} = \hat{n}'-\hat{n}$ es la dif. entre el versor con la dirección de propagación de la onda plana incidente, y el versor con la dir. de scattering.



$\underline{k} = k\hat{n}'$

Usando $\delta\epsilon(\underline{r}') = 4\pi\,\chi\sum_{i=1}^{N}\delta(\underline{r}'-\underline{r}_i)$

y reemplazando en $\frac{d\sigma}{d\Omega}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{\cancel{(4\pi)^2}}\left|(n\times\hat{e})\times\hat{n}\right|^2\cancel{(4\pi)^2}\,|\chi|^2\left|\sum_{i=1}^{N}\int e^{-ik\delta\hat{n}\cdot\underline{r}'}\,\delta(\underline{r}'-\underline{r}_i)\,d^3r'\right|^2 =$$

$$= k^4 |\chi|^2 \, |(\hat{n}\times\hat{e})\times\hat{n}|^2 \left|\sum_i e^{-ik\delta\hat{n}\cdot r_i}\right|^2 =$$

$$= k^4 |\chi|^2 \, |(\hat{n}\times\hat{e})\times\hat{n}|^2 \underbrace{\sum_{i,j=1}^{N} e^{ik\delta\hat{n}\cdot(r_i - r_j)}}_{\approx N}$$

↑ usando $|A|^2 = A\cdot A^*$

Para moleculas distribuidas al azar, los términos con $i \neq j$ dan una contribución despreciable.
(Comparar con una red $r_i = 2\pi i$
$\Rightarrow r_i - r_j = 2\pi m$!)

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = N k^4 |\chi|^2 \, |(\hat{n}\times\hat{e})\times\hat{n}|^2}$$

Para un gas diluido con
N moléculas $\quad \epsilon = 1 + 4\pi \underbrace{N\chi}_{\text{susceptibilidad total}}$

$$\Longrightarrow \chi = \frac{\epsilon - 1}{4\pi N}$$

y $\quad \dfrac{d\sigma}{d\Omega} = \dfrac{k^4}{16\pi^2 N}(\epsilon-1)^2 \, |(\hat{n}\times\hat{e})\times\hat{n}|^2$

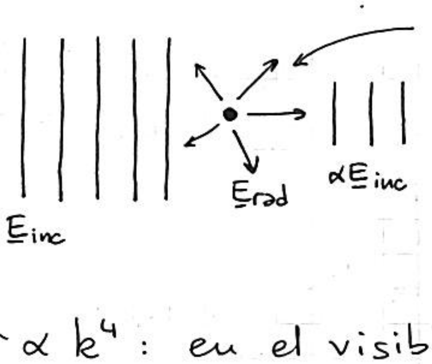
Integrando sobre el ángulo sólido: $\quad \boxed{\sigma = \dfrac{k^4}{6\pi N}(\epsilon - 1)^2}$

Usando $\quad n = \sqrt{\epsilon\mu} \approx \sqrt{\epsilon}$

$$\Longrightarrow \epsilon \approx n^2$$

y para $\quad n - 1 \ll 1 \qquad (\epsilon-1)^2 = (n^2-1)^2 = (n-1)^2(n+1)^2 \approx 4(n-1)^2$

$$\Longrightarrow \boxed{\sigma \approx \frac{2k^4}{3\pi N}(n-1)^2}$$ Coeficiente de absorción

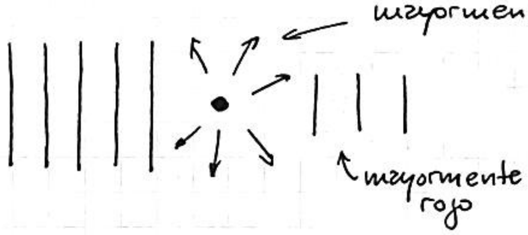


σ me dice que fracción de la potencia en la onda incidente es absorbida y re-emitida (dispersada) en todas direcciones (scattering).

$\sigma \propto k^4$: en el visible, el rojo es absorbido menos y el violeta mas. Esto explica:

+ el cielo azul
+ el sol (y la luna) rojiza al amanecer o anochecer

+ por qué el sol se vuelve mas rojo luego de erupciones volcánicas.
+ por qué no hay que tomar sol al mediodía.
+ las diferencias en la radiación recibida en verano e invierno.



La atenuación de la intensidad de la onda incidente es

$$\frac{dI}{dx} = -\sigma I$$

Deberíamos considerar $\sigma = \sigma(x)$ (pues en la atmósfera $N = N(x)$; decae exponencialmente para una atmósfera isotérmica). Pero consideremos N constante ($\approx$ el valor medio). Luego

$$\frac{dI}{I} = -\sigma dx$$

$$\Longrightarrow \boxed{I(x) = I_0 e^{-\sigma x}}$$

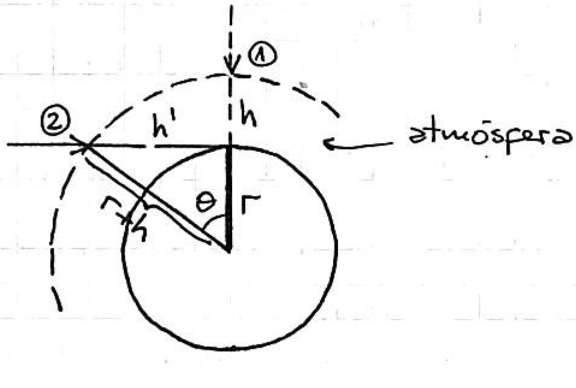
Tomando
$$\begin{cases} n-1 \approx 2.8 \cdot 10^{-4} \\ N \approx 2.7 \cdot 10^{25} \ 1/m^3 \\ k^4 = \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \sigma = \frac{2k^4}{3\pi N}(n-1)^2 \approx \frac{9.6 \cdot 10^{-31} m^3}{\lambda^4}$$

Para el rojo $\lambda = 6.5 \cdot 10^{-7} m \Longrightarrow \sigma_{rojo} \simeq 5.4 \cdot 10^{-6} \ 1/m$

Para el violeta $\lambda = 4.1 \cdot 10^{-7} m \Longrightarrow \sigma_{vio} \approx 3.4 \cdot 10^{-5} \ 1/m$

Tenemos dos casos:



Consideremos solo la atenuación por la tropósfera ($h \approx 15\,km$
en la aproximación de N uniforme:

Caso ①: para el rojo $\dfrac{I}{I_0} = e^{-\sigma_{rojo} h} \approx 0.92$

para el violeta $\dfrac{I}{I_0} = e^{\sigma_{vio} h} \approx 0.60$

Caso ②: Calculemos h'. $r \approx 6300\,km$

$$\cos\theta = \frac{r}{r+h} = \frac{6300}{6315} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow \theta \approx \sqrt{2\left(1 - \frac{6300}{6315}\right)} \approx 0.06$$

$$h' = (r+h)\,\text{sen}\,\theta \approx (r+h)\,\theta \approx 435\,km$$

$\Rightarrow$ para el rojo $\dfrac{I}{I_0} = e^{-\sigma_{rojo} h'} \approx 0.095$

para el violeta $\dfrac{I}{I_0} = e^{-\sigma_{vio} h'} \approx 3.7 \cdot 10^{-7}$

Notar el corrimiento al rojo en el amanecer y atardecer.