Definiendo $\quad Q(k) = \int f(s)\, e^{iks}\, ds$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = \frac{1}{2\pi} \int Q^N(k)\, e^{-ikx}\, dk}$$

Veamos el límite de N grande. Q varía rápido (y Q^N aún más), así que la contribución dominante debe ser la de $k \ll 1$. Aproximo

$$Q(k) \approx \int ds\, f(s) \left(1 + iks - \frac{1}{2} k^2 s^2 + \ldots\right) =$$

$$= 1 + ik\langle s\rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle s^2\rangle + \ldots$$

Defino $\langle s^n\rangle = \int s^n f(s)\, ds$ Momento de orden n (prop. de la distribución f)

$$\Rightarrow \ln Q^N = N \ln Q \approx N \ln\left(1 + ik\langle s\rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle s^2\rangle\right) \approx$$

"paso medio" $\qquad \ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2$

$$\approx N\left(ik\langle s\rangle - \frac{1}{2}k^2\langle s^2\rangle + \frac{1}{2}k^2\langle s\rangle^2\right)$$

$$= N\left(ik\langle s\rangle - \frac{1}{2}k^2\langle \Delta s^2\rangle\right) \qquad \text{con } \langle \Delta s^2\rangle = \langle s^2\rangle - \langle s\rangle^2$$

$\approx$ "ancho de la distribución f"

$$\Rightarrow \quad Q^N \approx e^{iNk\langle s\rangle - \frac{1}{2}Nk^2\langle\Delta s^2\rangle}$$

Luego $\quad p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-\alpha k^2 + \beta k} = e^{\beta^2/4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

$\alpha = \frac{1}{2}N\langle\Delta s^2\rangle$

$\beta = i(N\langle s\rangle - x)$

Reemplazando

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}$$

con $\begin{cases} \mu = N\langle s\rangle \\ \sigma^2 = N\langle\Delta s^2\rangle \end{cases}$

$\langle s\rangle$ y $\langle\Delta s^2\rangle$ es toda la info que necesito de f

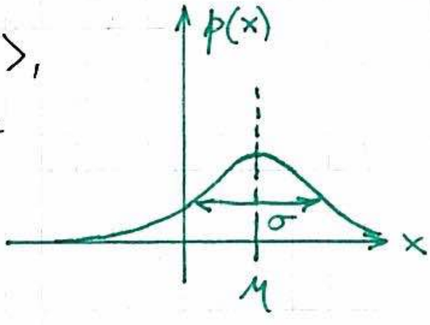
σ crece como $\sqrt{N}$

Distr. <u>Gaussiana</u> o Normal

Este es un caso particular del <u>teo. del límite central</u>: si $X_N = \sum_{i=1}^{N} x_i$ N variables aleatorias independientes

$\Rightarrow$ la función de distribución de prob. de X_N tiende a la Gaussiana para N grande. Esto es cierto aún si las $x_1, x_2 \dots x_N$ tienen distribuciones de probabilidad diferentes (pero con la misma media).

Veamos el significado de $\langle s\rangle$, $\langle\Delta s^2\rangle$, μ, σ, y el uso que podemos darle a $p(x)$:



<u>Momentos</u>

Dados los pasos x_i (discretos), o cualquier otra magnitud aleatoria discreta, el <u>valor medio</u> es

frec. de medición

$$\bar{x} = \frac{f(x_1)x_1 + f(x_2)x_2 + \dots}{f(x_1) + f(x_2) + \dots} = \sum_i x_i P(x_i)$$

En el caso continuo $\qquad \bar{x} = \int x\, p(x)\, dx$

En gral., para cualquier función de x, $g(x)$

$$\langle g(x)\rangle = \int g(x)\,p(x)\,dx \Longrightarrow \begin{cases} \langle f+p\rangle = \langle f\rangle + \langle p\rangle \\ \langle \alpha f\rangle = \alpha\langle f\rangle \\ \langle\langle f\rangle\rangle = \langle f\rangle \end{cases}$$

dist. de prob. del paso

luego $\langle x^n\rangle = \int x^n f(x)\,dx$

Veamos el significado de $\langle \Delta x^2\rangle$:

$$\langle \Delta x^2\rangle = \int f(x)\left(x-\langle x\rangle\right)^2 dx \geq 0 \quad \text{(dispersión)}$$
$$= \langle x^2\rangle - 2\langle x\rangle\langle x\rangle + \langle x\rangle^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$$

<u>Ejemplo</u>: camino al azar discreto

El desplazamiento medio es $\langle m\rangle = \sum m\,P_N(m) = \langle n_r\rangle - \langle n_\ell\rangle$

$$\langle n_r\rangle = \sum_{n_r=1}^{N} \frac{N!\,n_r}{n_r!\,n_\ell!} r^{n_r}\ell^{n_\ell} = r\frac{\partial}{\partial r}\sum \frac{N!}{n_r!\,n_\ell!} r^{n_r}\ell^{n_\ell}$$

$$n_r r^{n_r} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n_r}\right)$$

$$= r\frac{\partial}{\partial r}(r+\ell)^N$$

$$= rN\underbrace{(r+\ell)}_{=1}^{N-1} = rN$$

De la misma forma $\langle n_\ell\rangle = \ell N$

$$\Longrightarrow \langle m\rangle = N(r-\ell)$$

Notar que la diferencia entre r y ℓ me da un desplazamiento medio que puedo remover:

También:

$$\langle \Delta m^2\rangle = 4Nr\ell$$

<u>Entropía</u>

La probabilidad nos permite conocer ciertas propiedades de procesos aleatorios, y hasta cierto punto <u>predecir</u>. Pero ¿qué tan buena es la predicción? ¿Cuánta indeterminación tiene?

¿Es lo mismo una predicción para un sist. en el que el suceso A tiene $P = 1/2$, que otro en el que $P = 0{,}99$? En el primer caso tenemos mayor indeterminación, pero ¿cómo lo cuantificamos?

Definamos como medida de indeterminación a

$$S = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i \qquad \underline{\text{Entropía}}$$

la base del log depende del problema. En teo. de la información, donde la unidad es el bit, $\log = \log_2$. Acá usamos $\log = \ln$.

Si en un sistema todos los sucesos son equiprobables

$$\Rightarrow p_i = 1/N \quad \forall i$$

$$\Rightarrow S = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \ln N = \cancel{N} \cancel{\frac{1}{N}} \ln N = \ln N$$

A mayor N, mayor S

y es proporcional al nro. de sucesos posibles

1. Notar que para $N \gg 1$, esta definición cumple la prop. termodinámica de ser <u>extensiva</u>: al juntar dos sistemas, la entropía es la <u>suma</u>.
<u>Ejemplo</u>: para 1 dado tengo $N = 6$ posibles sucesos. Para dos dados, N^2 despreciando las repeticiones (mejor aprox. para $N \gg 1$).

$$S = \ln N^2 = \ln N + \ln N = S_1 + S_2$$

Supongamos que tenemos otro sistema donde los N sucesos <u>no</u> son equiprobables, y tienen prob. $p_1', p_2', \dots p_N'$

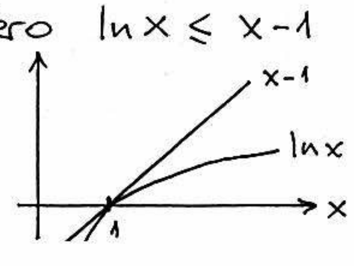
$$\Rightarrow \sum_i p_i = \sum_i p_i' = 1$$

Luego

$$S - S_{ne} = -\sum_i p_i \ln p_i + \sum_i p_i' \ln p_i' = \sum p_i' \ln (N p_i')$$

$$\ln \frac{1}{N} \sum p_i = \ln \frac{1}{N} \sum p_i' = -\sum p_i' \ln N$$

Pero $\ln x \leq x - 1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\ln \frac{1}{x}}_{-\ln x} \leq \frac{1}{x} - 1$



$$\Rightarrow \boxed{\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}}$$

Luego $$S - S_{ne} \geq \sum_i p_i' \left(1 - \frac{1}{Np_i'}\right) = \overbrace{\sum_{i=1}^{N} p_i'}^{1} - \overbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N}}^{1} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{S \geq S_{ne}}$$

La entropía de un experimento con resultados equiprobables es mayor que la de cualquier otro experimento con igual nro. de resultados posibles (noción de sist. desordenado)

2. Notar que S cumple prop. similares al 2° ppio. de la termodinámica. Si asociamos el equilibrio al estado mas desordenado, S aumenta hacia el equilibrio.

En el límite continuo, para una magnitud aleatoria $x \in [a, b]$, $p(x) = \frac{1}{b-a}$ $\forall x$ tiene la max. entropía.

Para $x \in (-\infty, \infty)$, la distribución normal tiene max. entropía. La demostración es similar.

<u>Dem</u>: Tomemos $$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma'}} e^{-x^2/2\sigma'}$$

(el valor medio se remueve con un cambio de variables). y $\sigma' = \sigma^2$

y una distribución no-Gaussiana con igual dispersión

$$p_{ng}(x) \quad \text{tq} \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} p_{ng}(x)\, dx = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{ng}(x)\, dx = \sigma' \end{cases}$$

Tomando $$\ln p = -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma') - \frac{x^2}{2\sigma'}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma') \int p\, dx + \frac{1}{2\sigma'} \int x^2 p\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma') \int p_{ng}\, dx + \frac{1}{2\sigma'} \int x^2 p_{ng}\, dx =$$

$$= - \int p_{ng} \left(-\frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma' - \frac{x^2}{2\sigma'} \right) dx = - \int p_{ng} \ln p \, dx$$

$$\Rightarrow \quad S - S_{ng} = - \int p_{ng} \left(\ln p - \ln p_{ng} \right) dx =$$

$$= \int p_{ng} \ln \left(\frac{p_{ng}}{p} \right) dx \geq \int p_{ng} \left(1 - \frac{p}{p_{ng}} \right) dx$$

$$= \int p_{ng}(x) \, dx - \int p(x) \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S \geq S_{ng}}$$

y la dist. normal tiene mayor entropia que cualquier otra distribución con igual dispersión. Si el equilibrio termodinámico tiene máxima entropia ⇒ la distr. normal debería jugar un papel importante.