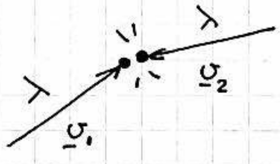
## Fenómenos de transporte

Veamos como un gas evoluciona al equilibrio. Fuera del equilibrio $f(\underline{r}, \underline{p}, t) \neq f^{(0)}$. Usualmente hay gradientes en la temp. y densidad del gas. Para llegar al equilibrio, energía y momento deben transportarse de una parte a otra, vía colisiones.

Tomemos $\begin{cases} \lambda : \text{camino libre medio} \\ \tau : \text{tiempo entre colisiones} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{\lambda}{\bar{v}} \qquad \text{con} \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$




Cada choque termina dos caminos libres

$$\Rightarrow \quad \tau \simeq \frac{n}{2 N_{col}}$$

$n$ ← nro. de part. por u. de volumen $= N/V$

$N_{col}$ ← nro. de choques x u. de volumen y de tiempo

$$\Rightarrow \lambda = \tau \bar{v} = \frac{n}{2 N_{col}} \bar{v}$$

Pero

$$N_{col} \simeq \int d^3p_1\, d^3p_2\, |\underline{v}_2 - \underline{v}_1|\, \sigma f_1 f_2 \simeq$$

$$\simeq \frac{\sigma n^2}{m} \left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^3 \int d^3p_1\, d^3p_2\, |\underline{p}_2 - \underline{p}_1|\, e^{-\frac{\beta}{2m}(p_1^2 + p_2^2)}$$

y tomando $\underline{P} = \underline{p}_1 + \underline{p}_2$ , $\underline{p} = \frac{1}{2}(\underline{p}_2 - \underline{p}_1)$

$$= \frac{\sigma n^2}{m} \left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^3 \int d^3P\, e^{-\beta P^2/4m} \int d^3p\, |\underline{p}|\, e^{-\beta p^2/m} = \frac{2 n^2 \sigma}{\sqrt{\pi m \beta}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, n^2 \sigma \bar{v}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda \approx \frac{\sqrt{\pi/8}}{n\sigma}} \quad y \quad \boxed{\tau = \frac{\sqrt{\pi/8}}{n\sigma\bar{v}}}$$

indep. de T!
Solo depende de $1/n$

Ejemplo : Para $\sigma = \pi a^2$

$a = 1\,\text{Å}$

$T = 300K$ , $P = 1$ atm $\Rightarrow \begin{cases} \lambda \approx 10^{-5}\,\text{cm} \\ \tau \approx 10^{-10}\,\text{s} \end{cases}$

Teorema de conservación

Consideremos $\chi(\underline{r}, \underline{p})$ una mag. de las partículas conservada en una colisión: $\chi_1' + \chi_2' = \chi_1 + \chi_2$

Tomando
$$\int d^3p\, \chi \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right) f = \cancel{\int d^3p\, \chi \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{col}}$$

pues $\chi$ no varía en la colisión

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3p\, \chi f + \frac{\partial}{\partial x_i} \int d^3p\, \chi v_i f$$
$$- \int d^3p\, \frac{\partial \chi}{\partial x_i} v_i f + \underbrace{\int \frac{\partial}{\partial p_i} (\chi F_i f)\, d^3p}_{=0} - \int \frac{\partial \chi}{\partial p_i} F_i f\, d^3p - \int \frac{\partial F_i}{\partial p_i} \chi f d^3p$$

pues $f \to 0$ si $|\underline{p}| \to \infty$

Usando que $\int f\, d^3p = n(\underline{r}, t)$ densidad de part.

y $\int A f\, d^3p = \langle nA \rangle = n \langle A \rangle$

pues $n$ no depende de $\underline{p}$

$$\Rightarrow \boxed{0 = \frac{\partial}{\partial t} \langle n\chi \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle n v_i \chi \rangle - n \left\langle v_i \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right\rangle - \frac{n}{m} \left\langle F_i \frac{\partial \chi}{\partial v_i} \right\rangle - \frac{n}{m} \left\langle \chi \frac{\partial F_i}{\partial v_i} \right\rangle}$$

flujo (x las paredes)

Límite hidrodinámico

Consideremos $\lambda \ll L$, con $L$ una long. característica del gas, y si tenemos muchas colisiones, pensemos que cada elemento de volumen está localmente en equilibrio.

Podemos aproximar

$$f(\underline{r},\underline{p},t) \approx f^{(0)}(\underline{r},\underline{p},t) + f^{(1)}(\underline{r},\underline{p},t) \qquad f^{(1)} \ll f^{(0)}$$

Maxwell-Boltzman local, con $\begin{cases} n = n(\underline{r}) \\ T = T(\underline{r}) \end{cases}$

Tomemos por ahora $f = f^{(0)} = n\left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta\frac{m}{2}(\underline{v}-\underline{u})^2}$

Para $\chi = m$, del teo. de conservación:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u}) = 0} \qquad \text{con} \begin{cases} \rho = \langle nm \rangle = nm \\ \underline{u} = \langle \underline{v} \rangle \end{cases}$$

¡vel. media! $\Rightarrow \underline{v} - \underline{u} = \underline{v}_{th}$ (vel. térmica)

Para $\chi = m v_j$ (momento lineal)

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\langle \rho v_j \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i}\langle \rho v_i v_j \rangle - \frac{\rho}{m} F_j = 0$$

asumo que f depende solo de la posición

Veamos que

$$\langle \rho v_i v_j \rangle = \langle \rho v_i^{th} v_j^{th} \rangle + \rho u_i u_j$$

$$\langle \rho v_i^{th} v_j^{th} \rangle = \langle \rho (v_i - u_i)(v_j - u_j) \rangle = \langle \rho v_i v_j \rangle - \overbrace{\rho u_i \langle v_j \rangle}^{\rho u_i u_j} - \underbrace{\rho \langle v_i \rangle u_j}_{\rho u_i u_j} + \rho u_i u_j$$

Además $\rho \langle v_i^{th} v_j^{th} \rangle = P_{ij}$ tensor de presión (flujo de la componente de momento $\hat{j}$ en la dirección $\hat{i}$)

Pero si $f \approx f^{(0)}$ la presión es isótropa, pues

$$\int \underbrace{v_i v_j}_{\text{impar}} \underbrace{f^{(0)}}_{\text{par}} d^3p = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad \Rightarrow \text{Tomo } \langle \rho v_i^{th} v_j^{th} \rangle = P\delta_{ij}$$

presión

De (1)

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j)}_{\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j)}^{\cancel{u_j \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)} + \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} + \delta_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho\frac{F_j}{m} = 0$$

$\rho\frac{F_j}{m} = f_j$ (fza. x u. de volumen)

$$\rho\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho\frac{\partial u_j}{\partial t} - \cancel{u_j \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\rho\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\underline{u}\right) = -\underline{\nabla}P + \underline{f}}$$

Ec. de Euler para un gas diluido

y reobtenemos la descripción de medio continuo. Cada elemento de volúmen del gas está aproximadamente en equilibrio con $f \approx f^{(0)}$.

Finalmente, tenemos la energía térmica. Tomando

$$\chi = \frac{1}{3} m \, |\underline{v} - \underline{u}|^2 \quad \text{y definiendo} \quad \Theta = kT = \frac{1}{3} m \langle |\underline{v}-\underline{u}|^2 \rangle$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\Theta + \frac{1}{c_v}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u})\Theta = 0}$$

$C_v = 3/2 Nk$