Aproximación del tiempo de relajación

Consideremos ahora la expansión al siguiente orden

$$f = f^{(0)} + f^{(1)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla} + \underline{F}\cdot\underline{\nabla}_p\right) f = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{\cancel{f^{(0)}}}_{=0 \text{ para Maxwell-Boltzmann}} + f^{(1)}\Big)_{col} \approx \underbrace{-\frac{f^{(1)}}{\tau}}_{\text{restituye la sol. al equilibrio}}$$

con τ el tiempo de relajación

(proporcional al tiempo entre colisiones).

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla} + \underline{F}\cdot\underline{\nabla}_p\right) f = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau}} \longrightarrow 0 \quad \text{para } f \to f^{(0)}$$

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} \approx f^{(0)} \qquad \text{pues } f^{(1)} \ll f^{(0)}$$

Notar que puedo calcular

$$f^{(1)} \simeq -\tau\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla} + \underline{F}\cdot\underline{\nabla}_p\right) f^{(0)}$$

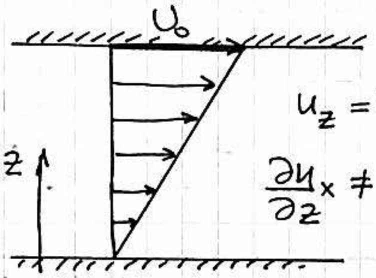
Con esta corrección la ec. de momento queda

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{u}\right) = -\underline{\nabla}P + \underline{f} + \underbrace{\mu}_{\text{viscosidad}}\left[\nabla^2\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u})\right]$$

Coeficientes de transporte:

Viscosidad

Consideremos un flujo



$u_z = u_y = 0$

$\frac{\partial u_x}{\partial z} \neq 0$

La viscosidad es responsable de la transferencia de momento

$$T_{zx} = \langle \rho\, v_z v_x \rangle \triangleq -\mu \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

transporte de momento p_x en la dirección z

viscosidad

y $\quad T_{zx} = \int m f\, v_z v_x\, d^3v$

Tomemos $\quad f^{(0)} = n \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta\frac{m}{2}\left[(\underbrace{v_x - u_x}_{v_x^{th} = U_x})^2 + v_y^2 + v_z^2\right]}$

Como f es indep. de t y de x, y, y E = 0

$$\Rightarrow \quad v_z \frac{\partial f^{(0)}}{\partial z} = -\frac{f^{(1)}}{\tau} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)} = -\tau v_z \frac{\partial f^{(0)}}{\partial z}$$

y $\quad f^{(1)} = \tau v_z \frac{\partial f^{(0)}}{\partial U_x} \frac{\partial u_x}{\partial z}$

luego

$$\mu = -\frac{m}{\frac{\partial u_x}{\partial z}} \int \left(\cancel{f^{(0)}} + f^{(1)}\right) v_z v_x\, d^3v = -m\tau \int \frac{\partial f^{(0)}}{\partial U_x} v_x v_z^2\, d^3v$$

par en v_z

Tomando $\quad U_x = v_x - u_x \quad \Rightarrow \quad v_x = U_x + u_x$

$dU_x = dv_x$

$$\Rightarrow \mu = -m\tau \int \frac{\partial f^{(0)}}{\partial U_x} (U_x + u_x) v_z^2\, dU_x\, dv_y\, dv_z =$$

$$= -m\tau \int \frac{\partial}{\partial U_x} \cancel{\left[f^{(0)} (U_x + u_x) v_z^2\right]} dU_x\, dv_y\, dv_z$$

pues $f^{(0)} \to 0$ para $U_x \to \pm\infty$

$$+ m\tau \underbrace{\int f^{(0)} v_z^2\, dU_x\, dv_y\, dv_z}_{=\; n\langle v_z^2 \rangle}$$

$n\langle v_z^2 \rangle$ y $\frac{1}{2} m \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{2} kT$

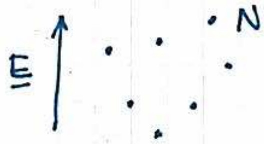
$$\Rightarrow \quad \mu = \cancel{m}\tau n \frac{kT}{\cancel{m}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \tau n k T}$$

Además $\quad \tau \sim \sqrt{\dfrac{m}{kT}}\,\dfrac{1}{n\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu \sim \dfrac{\sqrt{mkT}}{\sigma}}$

<u>Conductividad eléctrica</u> (en un gas)

Aplico un campo eléctrico $\underline{E} = E\hat{z}$, y $j_z = \sigma E$

con $\quad j_z = q\int d^3v\, f\, v_z = nq\langle v_z\rangle$



Nuevamente f indep. de t, y de $\underline{r}$

$$\Rightarrow \quad \frac{qE}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_z} = -\frac{f^{(1)}}{\tau} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)} = -\frac{qE\tau}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_z} \qquad \underline{F} = q\underline{E}$$

y $\quad \sigma = \dfrac{q}{E}\displaystyle\int d^3v\,\left(\cancel{f^{(0)}} + f^{(1)}\right) v_z = -\dfrac{q^2\tau}{m}\displaystyle\int d^3v\,\dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial v_z}\, v_z =$

$$= -\frac{q^2\tau}{m}\left[\int \cancel{\frac{\partial}{\partial v_z}\left(f^{(0)} v_z\right) d^3v} - \underbrace{\int f^{(0)} d^3v}_{=\, n}\right]$$

pues $f^{(0)} \to 0$
$v_z \to \pm\infty$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}}$$

y nuevamente $\quad \tau \sim \sqrt{\dfrac{m}{kT}}\,\dfrac{1}{n\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma \sim \dfrac{q^2}{\sigma\sqrt{mkT}}}$