Estadística de Fermi-Dirac

Ecuación de estado para un gas ideal de Fermi

Tenemos $$\frac{PV}{kT} = \sum_i \ln\left(1 + z e^{-\beta \epsilon_i}\right)$$

con $\epsilon_i = \frac{p_i^2}{2m}$

Para un volumen muy grande, las part. están libres y los niveles de energía son continuos

$$\sum_i \longrightarrow \frac{V}{h^3}\int d^3p$$

ya no necesito el factor de Boltzmann (part. idénticas)

$$\Rightarrow \frac{P}{kT} = \frac{4\pi}{h^3}\int_0^\infty p^2 dp \ln\left(1 + z e^{-\beta p^2/2m}\right) = \frac{1}{\lambda^3} f_{5/2}(z)$$

$$\text{y} \quad \frac{N}{V} = \frac{1}{v} = \frac{4\pi}{h^3}\int_0^\infty p^2 dp \frac{1}{z^{-1} e^{\beta p^2/2m} + 1} = \frac{1}{\lambda^3} f_{3/2}(z)$$

Como las part. pueden tener grados de libertad internos (ej., spin), se suele escribir

$$(1) \quad \frac{P}{kT} = \frac{g}{\lambda^3} f_{5/2}(z)$$

$$(2) \quad \frac{1}{v} = \frac{N}{V} = \frac{g}{\lambda^3} f_{3/2}(z)$$

g: degeneración de cada estado

Part. con números cuánticos diferentes pueden estar en un mismo estado. Pero las part. son no-interactuantes

$\Rightarrow$ Un gas de Fermi con núm. cuánt. diferentes es equivalente a g gases.

Acá $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}}$ (long. de onda térmica)

Notar que en de Broglie: $\lambda_{DB} = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} = 2\pi\sqrt{\frac{\hbar^2}{3mkT}}$ ($E = \frac{3}{2}kT$)

$$\text{y} \begin{cases} f_{5/2}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\, x^2 \ln\left(1 + z e^{-x^2}\right) = \sum_{\ell=1}^\infty \frac{(-1)^{\ell+1} z^\ell}{\ell^{5/2}} \\ f_{3/2}(z) = z\frac{\partial f_{5/2}}{\partial z} = \sum_{\ell=1}^\infty \frac{(-1)^{\ell+1} z^\ell}{\ell^{3/2}} \end{cases}$$

En general $f_\nu(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell z^\ell}{\ell^\nu}$ y $z \frac{\partial f_\nu}{\partial z} = f_{\nu-1}(z)$

$$\Rightarrow U = -\left.\frac{\partial q}{\partial \beta}\right)_{z,V} = kT^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{gV}{\lambda^3} f_{5/2}\right)_{z,V} = \frac{3}{2} kT \frac{gV}{\lambda^3} f_{5/2}(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{3}{2} NkT \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)}} = \frac{3}{2} PV \quad (3)$$

$$\text{y} \quad C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{15}{4} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)}$$

Veamos los comportamientos asintóticos:

<u>Gas no degenerado</u>: T alta, densidad baja, tq. $\lambda^3/\upsilon \ll 1$

La separación media entre partículas es mayor que la long. de onda de de Broglie

De (2)

$$\Rightarrow \frac{\lambda^3}{\upsilon} = \underbrace{\rho}_{\geq 1} f_{3/2}(z) \ll 1$$

luego $\langle n_i \rangle = e^{-\beta\epsilon}$ (Boltzmann)

$$\text{y} \quad f_{3/2}(z) = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/3}} - \dots \Rightarrow z \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{\lambda^3}{\rho\upsilon} \simeq z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \dots$$

$$\Rightarrow z = \frac{\lambda^3}{\rho\upsilon} + \frac{1}{2^{3/2}}\left(\frac{\lambda^3}{\rho\upsilon}\right)^2 + \dots = \frac{\lambda^3}{\rho\upsilon}\left(1 + \frac{1}{2^{3/2}}\frac{\lambda^3}{\rho\upsilon} + \dots\right)$$

Reemplazando en (1)

$$\frac{P}{kT} = \frac{g}{\lambda^3}\left(z - \frac{z^2}{2^{5/2}} + \dots\right) = \frac{1}{\upsilon}\left[1 + \frac{1}{2^{5/2}}\frac{\lambda^3}{\rho\upsilon} + \dots - \frac{1}{2^{7/2}}\frac{\lambda^3}{\rho\upsilon}(1+\dots)^2 + \dots\right]$$

$$\Rightarrow \frac{PV}{NkT} = 1 + a_1 \frac{\lambda^3}{\rho\upsilon} + \dots = \sum_\ell (-1)^{\ell-1} a_\ell \left(\frac{\lambda^3}{\rho\upsilon}\right)^{\ell-1}$$

<u>Expansión del virial</u>

(las correcciones no son por potenciales de interacción (como en Van der Waals), sino por ppio. de exclusión de Pauli

Al orden mas bajo $\boxed{PV = NkT}$, $\boxed{U = \frac{3}{2}PV}$

y $\boxed{C_V = \frac{3}{2} N k}$

+ Caso completamente degenerado: baja T, alta densidad, $\frac{\lambda^3}{v} \gg 1$.

Ahora $z \gg 1$. Puedo desarrollar

$$f_{3/2}(z) = \frac{4(\ln z)^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{\pi^2}{8}(\ln z)^{-2} + \dots \right]$$

Desarrollo de Sommerfeld

Al orden más bajo, de (1):

$$\frac{\lambda^3}{\rho v} = \frac{4(\ln z)^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \Rightarrow (\ln z)^{3/2} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}\,\frac{\lambda^3}{\rho v}$$

$$\Rightarrow \ln z = \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} \pi^{1/3} \frac{2\pi \hbar^2 \beta}{(\rho v)^{2/3} m} = \beta \epsilon_F \Rightarrow \boxed{kT \ln z = \epsilon_F} \circledast$$

Tomando

$$z = e^{\beta \epsilon_F}$$

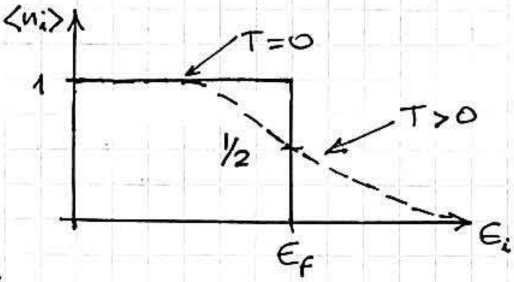
← pot. químico a $T=0$
= Energía de fermi

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{6\pi^2}{\rho v}\right)^{2/3}}$$

Veamos $\langle n_i \rangle$ para $T \simeq 0$: $\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \epsilon_F)} + 1}$

$$\Rightarrow \langle n_i \rangle \xrightarrow[\beta \to \infty]{} \begin{cases} 1 & \epsilon_i < \epsilon_F \\ 0 & \epsilon_i > \epsilon_F \end{cases}$$

ó $= g$



A $T=0$ todos los niveles hasta ϵ_F están llenos $\Rightarrow$ ϵ_F es la energía por debajo de la cual tengo N estados. → En el esp. de momento, las part. llenan una esfera de radio p_F (tq $\epsilon_F = p_F^2/2m$). La sup. de esa esfera es la superficie de fermi.

Podemos definir la temp. de fermi

$$kT_F = \epsilon_F$$

, y si $T \ll T_F$ el gas está degenerado.

Al orden siguiente

$$\frac{\lambda^3}{\rho v} = \frac{4(\ln z)^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}\left[1+\frac{\pi^2}{8}(\ln z)^{-2}\right]$$

Y usando $\circledast$

$$\underbrace{kT\ln z}_{\mu} = \frac{\epsilon_F}{\left[1+\frac{\pi^2}{8}(\ln z)^{-2}\right]^{2/3}} \approx \epsilon_F\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\epsilon_F}\right)^2+\dots\right]$$

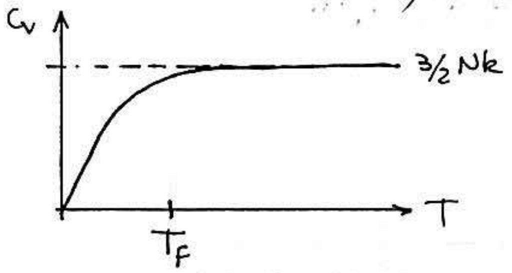
Usando $\quad f_{5/2}(z) = \frac{8}{15\pi^{1/2}}(\ln z)^{5/2}\left[1+\frac{5\pi^2}{8}(\ln z)^{-2}+\dots\right]$

De (3):

$$U = \frac{3}{5}NkT\ln z\left[1+\frac{\pi^2}{2}(\ln z)^{-2}+\dots\right] =$$

$$= \frac{3}{5}N\epsilon_F\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\epsilon_F}\right)^2+\dots\right]$$

Y $\quad C_V = \frac{3}{\cancel{5}}N\cancel{\epsilon_F}\cdot\frac{\cancel{5}\pi^2}{12}\,\frac{2k^2T}{\epsilon_F^{\cancel{2}}} = \frac{\pi^2}{2}\,\frac{Nk^2T}{\epsilon_F}$



También $\quad P = \frac{2}{3}\frac{U}{V} = \frac{2}{5}\frac{N}{V}\epsilon_F\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\epsilon_F}\right)^2+\dots\right]$

Y $\quad P \xrightarrow[T\to 0]{} \frac{2}{5}\frac{N}{V}\epsilon_F \quad \leftarrow$ solo una partícula puede tener $p=0$, las demás chocan con las paredes. Importante en enanas blancas.

Finalmente, puede verse que

$$S = \frac{\pi^2}{2}\frac{Nk^2T}{\epsilon_F} + \dots$$

Y $S \xrightarrow[T\to 0]{} 0$.