Paramagnetismo de Pauli

Una carga en un campo magnético tiene

$$H = \frac{1}{2m}\left(\underline{p} + \frac{q}{c}\underline{A}\right)^2 - \underline{\mu}\cdot\underline{H} \quad \text{con } q = e \text{ (carga } -e\text{)}$$

paramagnetismo

diamagnetismo
(campo inducido opuesto al externo,
suele ser < que el inducido por paramagnetismo)

Veamos $H = \frac{p^2}{2m} - \underline{\mu}\cdot\underline{H}$

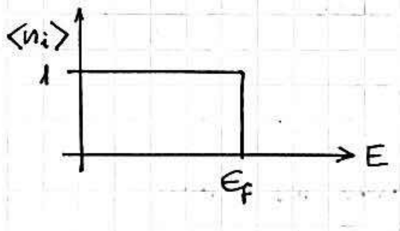
(si no hay acoplamiento spin-orbita, los efectos son aditivos).

Para $T \gg T_F$ tenemos $\chi = \frac{N\mu^2}{kT} \xrightarrow[T\to 0]{} \infty$

Pero por ppio. de exclusión de Pauli, los dipolos fluctuan aún a $T \ll T_F$. Tenemos, para spin 1/2

$$E_\pm = \frac{p^2}{2m} \mp \mu H$$

A $T=0$ todos los niveles hasta ϵ_F están llenos. La E_{cin} de las part. con $s=1/2$ va de 0 a $\epsilon_F + \mu B$, y las con $s=-1/2$ de 0 a $\epsilon_F - \mu B$. Veamos el nro. de niveles ocupados

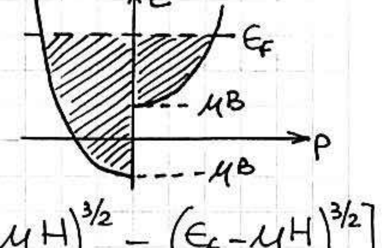


De $\frac{N}{V} = \frac{4\pi}{h^3}\int_0^\infty p^2\,dp \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}+1} =$

T=0

$\to 1$ si $\epsilon < \epsilon_F$

$$= \frac{4\pi}{h^3}\frac{p^3}{3}\bigg|_{\epsilon_F} = \frac{4\pi}{h^3}\frac{(2mE_{cin})^{3/2}}{3}\bigg|_{\epsilon_F}$$



$$\Longrightarrow N_\pm = \frac{4\pi}{h^3}\frac{V}{3}\left[2m(\epsilon_F \pm \mu H)\right]^{3/2}$$

El momento magnético total es

$$M = \mu(N_+ - N_-) = \frac{4\pi\mu V}{3h^3}(2m)^{3/2}\left[(\epsilon_F+\mu H)^{3/2} - (\epsilon_F - \mu H)^{3/2}\right]$$

⊛ y la susceptibilidad magnética por unidad de volúmen es

$$\chi_{T=0} = \frac{1}{V}\lim_{H\to 0}\frac{M}{H} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\frac{4\pi\mu}{\cancel{3}h^2}(2m)^{3/2}\cancel{2}\mu\,\epsilon_F^{1/2} =$$

$$= \frac{4\pi\mu^2}{h^2}(2m)^{3/2}\epsilon_F^{1/2}$$

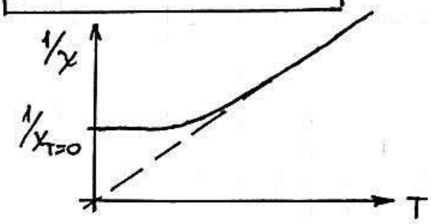
y usando $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{6\pi^2}{\rho v}\right)^{2/3}$

$\rho = 2$ pues $\rho = 2s+1$

$$\Rightarrow \boxed{\chi_{T=0} = \frac{3}{2}\frac{n\mu^2}{\epsilon_F}}$$

⊛ Mejor aún, podemos calcular χ usando

$$M = M_0 + \underbrace{\left.\frac{\partial M}{\partial H}\right|_{B=0}}_{\chi} H + \dots \quad \text{y} \quad \boxed{\chi_{T=0} = \frac{3}{2}\frac{N\mu^2}{\epsilon_F}}$$



Diamagnetismo de Landau

Veamos ahora el efecto del otro término en un gas

$$H = \frac{1}{2m}\left(\underline{p} + \frac{q\underline{A}}{c}\right)^2$$

Si $\underline{B} = B\hat{z} = \underline{\nabla}\times\underline{A} \Rightarrow \underline{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$

$$\text{y} \quad H = \underbrace{\frac{p_z^2}{2m}}_{\text{part. libre}} + \underbrace{\frac{1}{2m}\left[\left(p_x - \frac{qB}{2c}y\right)^2 + \left(p_y + \frac{qB}{2c}x\right)^2\right]}_{\text{osc. armónico}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \hbar\omega\left(l + \frac{1}{2}\right) \quad \text{con} \quad \omega = \frac{qB}{mc}$$

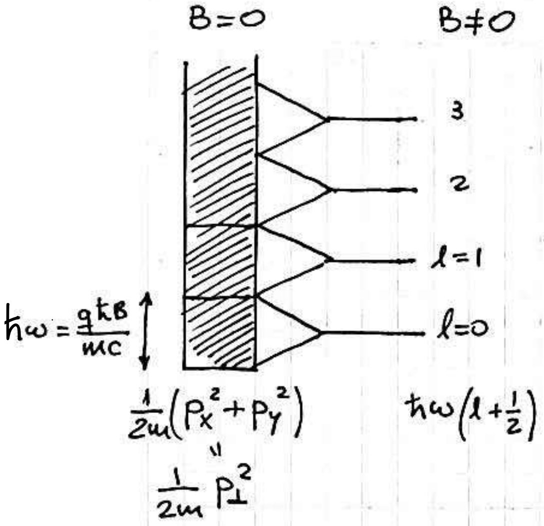
Luego $\quad q = \ln Z = \sum_i \ln\left(1 + z e^{-\beta\epsilon_i}\right)$

suma sobre todos los valores posibles de p_x, p_y, p_z

Veamos el paso al continuo. En p_z

$$\sum_{p_z} \longrightarrow \frac{L}{h}\int dp_z$$

En p_x, p_y los niveles están cuantizados, pero tienen degeneración (son la superposición de un montón de estados continuos cuando $B=0$).



$$\sum_{p_x, p_y} \longrightarrow \frac{L^2}{h^2}\int dp_x\, dp_y = \frac{L^2}{h^2}\int p_\perp\, dp_\perp\, d\varphi_{p_\perp}$$

$$= \frac{\cancel{2}\pi L^2}{h^2}\frac{p^2}{\cancel{2}}\Big|_l^{l+1} = \frac{\pi L^2}{h^2}\, 2\cancel{m}\, \frac{q\hbar B}{\cancel{m}c}(\cancel{l}+1-\cancel{l})$$

$$= L^2\frac{qB}{hc} = g$$ ← multiplicidad = densidad de estados

$$\Rightarrow q = \frac{L}{h}\int_{-\infty}^{\infty} dp_z \sum_{l=0}^{\infty}\overbrace{\left(\frac{L^2 qB}{hc}\right)}^{g}\ln\left[1 + z e^{-\beta\left(\frac{p_z^2}{2m} + \hbar\omega(l+\frac{1}{2})\right)}\right]$$

$$= \frac{\overset{V}{L^3}}{h^2}\frac{qB}{c}\int_{-\infty}^{\infty} dp_z \sum_l \ln\left[1 + z e^{-\beta\left(\frac{p_z^2}{2m} + \hbar\omega(l+1/2)\right)}\right]$$

Usando la fórmula de Euler - Maclaurin

$$\sum_{l=0}^{\infty} f(l + 1/2) \approx \int_0^{\infty} f(x)\,dx + \frac{1}{24}f'(0)$$

$$\Rightarrow q = \frac{V}{h^2}\frac{qB}{c}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_0^{\infty} dx\ \ln\left[1 + z e^{-\beta\left(\frac{p_z^2}{2m} + \hbar\omega x\right)}\right] - \frac{\beta\hbar\omega}{24}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_z}{\frac{e^{\beta p_z^2/2m}}{z} + 1}\right]$$

$\omega = qB/mc$

Tomando $\begin{cases} x' = Bx \\ dx' = B\,dx \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \beta p_z^2/2m \\ dy = \frac{\beta}{m}\sqrt{\frac{y\,2m}{\beta}}\,dp_z = \\ \quad = y^{1/2}\sqrt{\frac{2\beta}{m}}\,dp_z \end{cases}$$

¡independiente de B!

$$\Rightarrow q = \frac{V}{h^2}\frac{qB}{c}\left\{\frac{1}{B}\int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_0^{\infty} dx' \ln\left[1 + z e^{-\beta\left(\frac{p_z^2}{2m} + \frac{\hbar q}{mc}x'\right)}\right]\right\} -$$

$$- \cancel{2}\frac{\beta\hbar\omega}{\cancel{24}_{12}}\sqrt{\frac{m}{2\beta}}\int_0^{\infty}\frac{y^{-1/2}\,dy}{z^{-1}e^y + 1} = q_1 + q_2$$

Tomando $\mu_B = \frac{q\hbar}{2mc}$ (magnetón de Bohr para $q = e$, $m = m_e$)

$$\Rightarrow q_2 = -\frac{(\mu_B B)^2}{6h^3}\beta^{1/2}\pi V(2m)^{3/2}\overbrace{\int_0^{\infty}\frac{y^{-1/2}\,dy}{z^{-1}e^y + 1}}^{\sqrt{\pi}\, f_{1/2}(z)} = -\frac{(\mu_B B)^2}{6h^3}\beta^{1/2}(2\pi m)^{3/2} V f_{1/2}(z)$$

$U = U_0 - \underline{M}\cdot\underline{B}$

y como $q = \frac{S}{k} + \mu\beta\bar{N} - \beta U \Longrightarrow \chi = \frac{1}{\beta B}\frac{\partial q}{\partial B}\Big|_{V,T,z}$

$$\Longrightarrow \boxed{\chi = -\frac{(2\pi m)^{3/2}\mu_B^2 V}{3h^3\beta^{1/2}} f_{1/2}(z)}$$

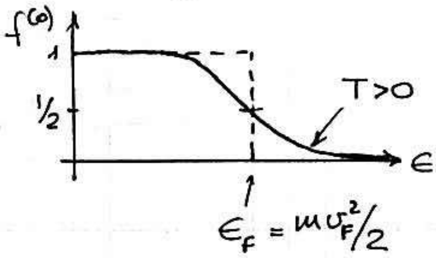
$\longrightarrow -\frac{N\mu_B^2}{3kT}$ $\quad T \gg T_F$

$\longrightarrow -\frac{N\mu_B^2}{2\epsilon_F}$ $\quad T \ll T_F$

Notar que $\mu_B \xrightarrow[h\to 0]{} 0$: Es un efecto puramente cuántico.

<u>Conductividad en metales</u> : $\underline{E} = E\hat{z}$

$\sigma = \frac{J_z}{E} = \frac{q}{E}\int v_z f \, d^3p$ pero ahora $f^{(0)} = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT}+1}$



De Boltzmann

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial t}} + \cancel{\underline{v}\cdot\underline{\nabla} f} + \underline{F}\cdot\underline{\nabla}_p f = -\frac{f^{(1)}}{\tau}$$

$$\Rightarrow f^{(1)} = -\tau q E \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_z}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{q}{Em}\int p_x \left(\cancel{f^{(0)}} + f^{(1)}\right) d^3p = -\frac{\tau q^2 \cancel{E}}{\cancel{E}m}\int p_x \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_x} d^3p =$$

$$= \frac{\tau q^2}{m}\int f^{(0)} d^3p = \frac{n q^2 \tau}{m}$$

y $\boxed{\sigma = \frac{n q^2 \tau}{m}}$ pero ahora $\tau = \tau(v_F)$.

los electrones con $E \approx \epsilon_F$ son los responsables de la conducción.