Estadística de Bose-Einstein

Ecuación de estado para un gas ideal de Bose

Ahora tenemos que tener cuidado con los términos con $\underline{p}=0$ que pueden diverger. Tomemos

$$\frac{PV}{kT} = -\sum \ln\left(1 - z e^{-\beta\epsilon}\right) =$$
$$= \ln(1-z) - \frac{4\pi V}{h^3}\int p^2 dp \ln\left(1 - z e^{-\beta p^2/2m}\right)$$

y $$\frac{1}{v} = \frac{N}{V} = \frac{1}{V}\sum \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}-1} =$$
$$= \frac{1}{V}\frac{z}{1-z} + \frac{4\pi}{h^3}\int \frac{p^2 dp}{z^{-1} e^{\beta p^2/2m}-1}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{P}{kT} = \dfrac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \dfrac{1}{V}\ln(1-z) \\[2mm] \dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \dfrac{1}{V}\dfrac{z}{1-z} = N_0/V \end{cases}$$

Fracción de partículas con $\underline{p}=0$ (condensado)

con $$g_{5/2}(z) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\, x^2 \ln\left(1 - z e^{-x^2}\right) = \sum_{\ell=1}^\infty \frac{z^\ell}{\ell^{5/2}}$$

$$g_{3/2}(z) = z\frac{\partial g_{5/2}}{\partial z} = \sum \frac{z^\ell}{\ell^{3/2}}$$

luego

$$U = -\frac{\partial q}{\partial \beta}\Big)_{z,V} \Rightarrow \boxed{U = \frac{3}{2}kT\frac{V}{\lambda^3} g_{5/2}(z)} = \frac{3}{2}PV$$

PV/kT

Como antes, para T grande
$$\begin{cases} g_{5/2}(z) \approx z \\ g_{3/2}(z) \approx z \end{cases}$$
y $\boxed{PV = NkT}$

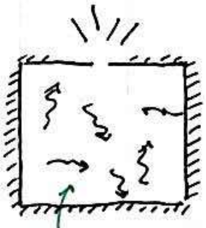
el término de $\underline{p}=0$ es despreciable

y a órdenes más altos $$\frac{PV}{NkT} = \sum_{\ell=1}^\infty a_\ell \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{\ell-1}$$

Antes de ver T pequeña, veamos un caso particular.

Gas de fotones

Para un fotón $\quad E = \hbar\omega \quad$ con $\quad \omega = c|\underline{k}| = \dfrac{cp}{\hbar}$



$$\Rightarrow \quad E = \sum_{\underline{k},\sigma} \hbar\omega\, n_{\underline{k},\sigma} \longleftarrow$$ nro. de fotones con $\underline{k}$ y polarización σ

el nro. de fotones es arbitrario

$\Rightarrow$ no tengo vínculo sobre N ($\Rightarrow \mu = 0$)

luego $$Q = \sum_{\{n_{\underline{k},\sigma}\}} e^{-\beta E} = \sum_{\{n\}} e^{-\beta \sum_{\underline{k}\sigma} \hbar\omega n_{\underline{k},\sigma}} =$$

$$= \prod_{\underline{k},\sigma} \sum_n e^{-\beta\hbar\omega} = \prod_{\underline{k},\sigma} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = Z \text{ con } z = 1$$ (pues $\mu = 0$)

luego $$q = \ln Q = -\sum_{\underline{k},\sigma} \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right) = -\underset{\text{2 polarizaciones}}{2}\sum_{\underline{k}} \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right) = \frac{PV}{kT} \qquad (1)$$

Además

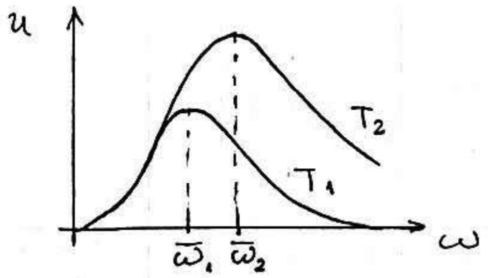
$$U = -\frac{\partial q}{\partial \beta} = \sum_{\underline{k}} \frac{2\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \sum_{\underline{k}} \hbar\omega \langle n_{\underline{k}} \rangle \quad (2)$$ y para $V \to \infty$

$$U \xrightarrow[V\to\infty]{} 2\,\frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty p^2\, dp\, \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \overbrace{2\,\frac{4\pi V \hbar^4}{h^3 c^3}}^{V\hbar/\pi^2 c^3} \int d\omega\, \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

$$p = \frac{\hbar\omega}{c}\,, \quad dp = \frac{\hbar}{c}\, d\omega$$

$$\Rightarrow \frac{U}{V} = \int_0^\infty d\omega\; u(\omega, T) \quad \text{con} \quad \boxed{u(\omega,T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\, \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}}$$

Distribución de Planck



Integrando

$$\boxed{\frac{U}{V} = \frac{\pi^2}{15}\,\frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3}}$$

y

$$\boxed{\frac{C_V}{V} = \frac{4\pi^2 k^4}{15(\hbar c)^3}\, T^3}$$

Para la ec. de estado, de (1) para $V \to \infty$

$$\frac{PV}{kT} = -2\,\frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty p^2\, dp\, \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right) = -2\,\frac{4\pi V \hbar^3}{h^3 c^3}\int d\omega\, \omega^2 \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

$$= -2\,\frac{4\pi V \hbar^3}{h^3 c^3}\left[\cancel{\frac{\omega^3 \ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)}{3}}\Big|_0^\infty - \frac{\beta\hbar}{3}\int_0^\infty d\omega\, \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\right] = \frac{\beta U}{3}$$

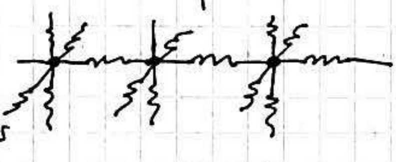
$$\Longrightarrow \quad \boxed{PV = \frac{1}{3}U} \qquad \text{Presión de radiación}$$

Finalmente, el flujo de energía que sale por el agujero es

$$I = \int_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{U}{V}\, \underbrace{v_z}_{c\cos\theta}\, s\theta\, d\theta\, d\phi = \underbrace{\sigma}_{\text{cte. de Stefan}} T^4 \qquad \text{Ley de } \underline{\text{Stefan-Boltzmann}}$$

<u>Gas de fonones</u>

El resultado anterior permite resolver el problema de C_V en un sólido para $T \to 0$. Consideremos un sólido: tenemos $3N$ modos normales de vibración: <u>fonones</u>. De (2), ahora



N partículas

$$p = \hbar k = \frac{\hbar\omega}{v_s}$$

vel. del sonido

3 modos de polarización

$$U = \sum_{i=1}^{3N} \frac{3\hbar\omega_i}{e^{\beta\hbar\omega_i}-1}$$

y para $V \to \infty$

Ahora tengo una ω máxima

$$U = 3\cdot\frac{4\pi V}{h^3}\int_0^{\hbar k_{max}} p^2\, dp\, \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} = \underbrace{3\cdot\frac{4\pi V}{h^3}\left(\frac{\hbar}{v_s}\right)^3}_{\frac{3V}{2\pi^2 v_s^3}} \int_0^{\omega_{max}} \omega^2 d\omega\, \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

Necesito estimar ω_{max} (que depende del sólido). Puedo pensar a $\rightarrow \rho(\omega) = \frac{3V}{2\pi^2 v_s^3}\omega^2$ como la degeneración de los modos con frec. entre ω y $\omega + d\omega$ (densidad de estados).

$\Rightarrow$ pido

$$\int_0^{\omega_{max}} \rho(\omega)\, d\omega = \int_0^{\omega_{max}} \frac{3V}{2\pi^2 v_s^3}\,\omega^2 d\omega = 3N$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{max} = \boxed{v_s \left(\frac{6\pi^2}{v}\right)^{1/3} = \omega_D} \qquad \text{Frec. de Debye}$$

y puedo definir $\boxed{kT_D = \hbar\omega_D}$ Temperatura de Debye

Volviendo a U, tomando $x = \beta\hbar\omega = \hbar\omega/kT$

$$U = \frac{3V}{2\pi^2 v_s^3}\,\frac{1}{\beta^4\hbar^3}\int_0^{\beta\hbar\omega_D}\frac{x^3}{e^x-1}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{U}{N} = 3kT\cdot\frac{3}{(T_D/T)^3}\int_0^{T_D/T}\frac{x^3}{e^x-1}\,dx \underset{T\ll T_D}{\approx} 3kT\,\frac{\pi^4}{5}\left(\frac{T}{T_D}\right)^3$$

y $\boxed{C_V \sim T^3}$