Condensado de Bose - Einstein

Veamos ahora el caso completamente degenerado para un gas de Bose que conserva el número de partículas. Tenemos

$$\frac{1}{v} = \frac{N}{V} = \underbrace{\frac{1}{V}\frac{z}{1-z}}_{N_0/V} + \underbrace{\frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z)}_{N_\varepsilon/V}$$

$N_\varepsilon/V \rightarrow$ fracción de partículas con $\underline{p} \neq 0$ y $\varepsilon \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\lambda^3 N_0}{V} = \frac{\lambda^3}{v} - g_{3/2}(z) > 0 \qquad \text{si} \qquad \frac{\lambda^3}{v} > g_{3/2}(z)$$

En ese caso tengo un condensado de BE: $N_0 \neq 0$ y una fracción de las partículas se acumulan en el nivel de energía mas bajo posible.

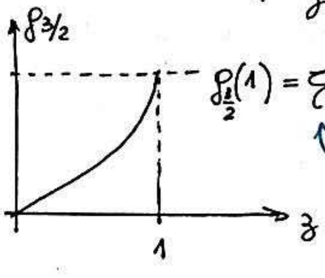
Veamos si esto es posible. Como $N_0 = \dfrac{z}{1-z} \Rightarrow 0 \leq z \leq 1$

Diferente a Fermi

Además $g_\nu(z) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell^\nu}$

y converge para $0 \leq z \leq 1$

$$g_{3/2} = z + \frac{z^2}{2^{3/2}} + \cdots$$



$g_{3/2}(1) = \zeta(3/2) \approx 2.612$

Func. zeta de Riemann

luego $\quad g_{3/2}(z) \leq 2.612 \quad$ y el caso degenerado corresponde a

$$\frac{\lambda^3}{v} > 2.612 \longrightarrow$$ (separación entre partículas del orden de la long. de de Broglie)

Veamos la condición (a N y V fijos):

$$\frac{\lambda_c^3}{v} = g_{3/2}(1) = \underbrace{\left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT_c}\right)^{3/2}}_{\lambda^3} \frac{N}{V}$$

pues $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}}$

$$\Longrightarrow \boxed{T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk}\left(\frac{N}{V\zeta(3/2)}\right)^{2/3}}$$

O, a T y V fijos, tenemos

$$v_c = \frac{V}{N_c} = \frac{\lambda^3}{g_{3/2}(1)} = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}\right)^{3/2}\frac{1}{\zeta(3/2)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{N_c = \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\zeta(3/2)V} \qquad (1)$$

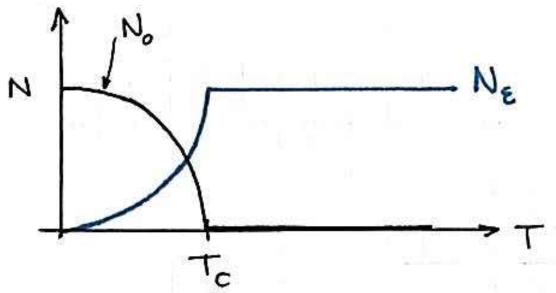
Supongamos que tengo un gas con $N < N_c$ partículas, a T y V fijos $\Rightarrow N_0 = 0$ y las partículas llenan los niveles con $\underline{p} \neq 0$ ($\Rightarrow N = N_\varepsilon$). Si agrego partículas cuando $N > N_c$, el exceso $(= N - N_c)$ va al nivel con $\underline{p} = 0$ (que para Bosones, puede recibir <u>infinitas</u> partículas). Tengo una <u>transición de fase</u>: para $N < N_c$ todas las part. tienen $\underline{p} \neq 0$, para $N > N_c$ coexisten dos fases (N_ε part. con $p \neq 0$, N_0 con $\underline{p} = 0$) con $N_\varepsilon = N_c$, $N_0 = N - N_c$.

Lo mismo ocurre si $T < T_c$ para <u>N fijo</u>. Puedo escribir (1) como

$$N_c = N_\varepsilon = N\, T^{3/2}\left[\frac{mk}{2\pi\hbar^2}\left(\frac{\zeta(3/2)V}{N}\right)^{2/3}\right]^{3/2} = N\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

y $$N_0 = N - N_\varepsilon = N\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad N_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } T > T_c \\ N\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right] & \text{si } T < T_c \end{cases}$$



La ecuación de estado sale de

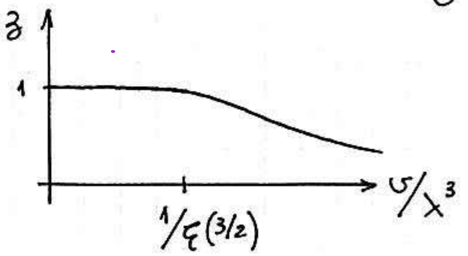
$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{1}{V} \ln(1-z)$$

Veamos que el último término es siempre despreciable.

Para $T < T_c$, de $N_0 = \frac{z}{1-z} \Rightarrow z = \frac{N_0}{N_0+1} \underset{N_0 \gg 1}{\approx} 1 - \frac{1}{N_0}$

y $z \approx 1$

Para $T > T_c$, $\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(z) \underset{z<1}{\approx} z + \frac{z^2}{2^{3/2}} + \cdots$ y $z \sim 1/(v/\lambda^3)$ al orden mas bajo



En ambos casos

$$\frac{1}{V} \ln(1-z) \xrightarrow[V\to\infty]{} 0$$

y luego

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) = \begin{cases} g_{5/2}(1)/\lambda^3 = \zeta(5/2)\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} & \text{si } T<T_c \\ g_{5/2}(z)/\lambda^3 & \text{si } T>T_c \end{cases}$$

En la transición $T = T_c$

$$P(T_c) \equiv P_s(T) = \zeta(5/2)\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} (kT)^{5/2}$$

es la <u>presión de vapor saturado</u> $= P_c$ a una dada T

y luego

$\lambda^3 = \zeta(3/2)\, v$ en la transición

$$\frac{dP_s}{dT}(T) = \frac{5}{2}\,\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} k = \frac{5}{2}\,\frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)}\,\frac{k}{v} =$$

$$= \frac{1}{vT}\left[\frac{5}{2}\,\frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)}\,kT\right]$$

dif. de entropía entre las dos fases

En la transicion $v_0 = 0$, así que $\Delta v = v$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP_s}{dT}(T) = \frac{\ell}{\Delta v\, T}} \qquad \text{con} \quad \ell = \frac{5}{2}\,\frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)}\,kT = T\Delta s \leftarrow \text{calor latente}$$

y es la ec. de Clausius - Clapeyron, y la transformación es de 1° orden como el cambio de estado de la materia.

Además

$$U = \frac{3}{2}PV = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\dfrac{kTV}{\lambda^3}\, g_{5/2}(1) = \dfrac{3}{2}V\left(\dfrac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}(kT)^{5/2}\,\zeta\left(\dfrac{5}{2}\right) & (T<T_c) \\ \dfrac{3}{2}\dfrac{kTV}{\lambda^3}\, g_{5/2}(z) = \dfrac{3}{2}V\left(\dfrac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{5/2}(kT)^{3/2}\, g_{5/2}(z) & (T>T_c) \end{cases}$$

Luego, para $T<T_c$

$$C_V = \frac{15}{4}kV\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}\frac{kV}{\lambda^3}\,\zeta\left(\frac{5}{2}\right)$$

y para $T>T_c$

$$C_V = \frac{15}{4}\frac{kV}{\lambda^3}\, g_{5/2}(z) + \underbrace{\frac{3}{2}\frac{kTV}{\lambda^3}\,\frac{\partial g_{5/2}}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial T}}_{=A}$$

y usando que

$$\frac{\partial g_{5/2}}{\partial z} = \frac{1}{z}\, g_{3/2}(z)$$

y para $T>T_c$ $\quad g_{3/2}(z) = \dfrac{\lambda^3}{v} = \dfrac{1}{v}\left(\dfrac{2\pi\hbar^2}{mkT}\right)^{3/2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_{3/2}}{\partial T} = -\frac{3}{2v}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}\right)^{3/2}\frac{1}{T} = -\frac{3\lambda^3}{2vT} = -\frac{3}{2T}\, g_{3/2}(z)$$

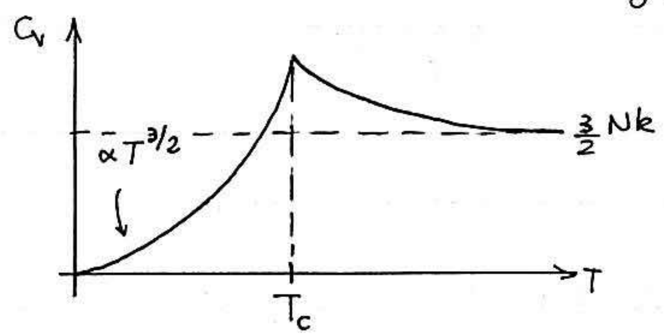
$$\text{y} \quad \frac{\partial g_{3/2}}{\partial z} = \frac{1}{z}\, g_{1/2}(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial T} = -\frac{3}{2T}\, z\,\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}$$

Reemplazando en A

$$A = -\frac{9}{4}\left(\frac{kV}{\lambda^3}\right)\cancel{z}\,\frac{1}{\cancel{z}}\,g_{3/2}(z)\,\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} = -\frac{9}{4}\,kN\,\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}$$

$$\frac{kvN}{\lambda^3} = kN\,\frac{1}{g_{3/2}(z)}$$

Y $$C_V = \frac{15}{4}\,\frac{kV}{\lambda^3}\,g_{5/2}(z) - \frac{9}{4}\,kN\,\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}$$



Finalmente, se puede ver que

$$\frac{S}{Nk} = \begin{cases} \frac{5}{2}\,\frac{v}{\lambda^3}\,g_{5/2}(1) & (T<T_c) \\ \frac{5}{2}\,\frac{v}{\lambda^3}\,g_{5/2}(z) - \ln z & (T>T_c) \end{cases}$$

y $S \xrightarrow[T\to 0]{} 0$. Además, la fase condensada tiene $S=0$ pues está a $T=0$ (son las partículas con $\underline{p}=0$) $\Rightarrow$ A $T<T_c$, la contribución a S proviene solo de las partículas fuera del condensado.

He^4 superfluido, y superconductores, son ejemplos de BEC (en el caso de superconductores, los e^- son fermiones, y deben agruparse en pares de Cooper para poder condensar).
(idem con He^3). Estrictamente hablando, un CBE de un gas se consiguió recién en 1995.