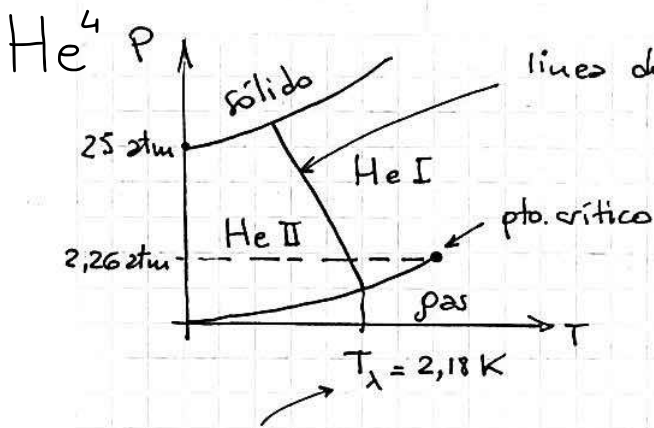


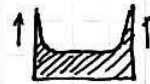
Superfluidos



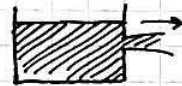
En comparación, $T_c = 3,14 \text{ K}$
(para part. no interactuantes)

El He II tiene propiedades extrañas:

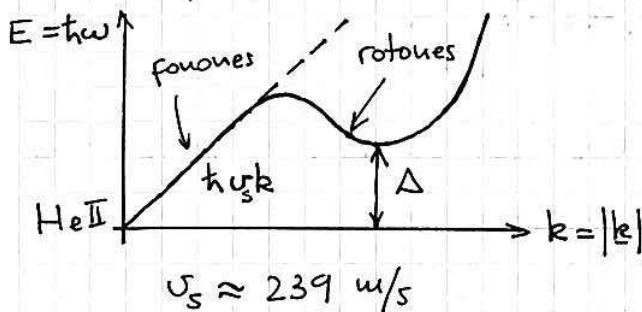
+ En un recipiente, sube por las paredes.



+ Fluye por un orificio sin fricción. ⊗



A T finita tenemos dos fluidos: una fase superfluida, y una fase de fluido "normal". A $T=0$ todo el fluido es superfluido. Consideremos $T \ll T_\lambda$. Una perturbación del superfluido debería excitar fonones:



Además de estas excitaciones, a $T > 0$ tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_n + \rho_s \\ \rho \underline{u} &= \rho_n \underline{u}_n + \rho_s \underline{u}_s \end{aligned} \right\}$$

Modelo de Tisza

La onda de sonido corresponde

a \underline{u}_n y \underline{u}_s oscilando en fase:

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \underline{u}_n \\ &\longrightarrow \underline{u}_s \end{aligned}$$

si oscilan en contrafase:

$$\begin{aligned} &\longleftarrow \underline{u}_n \\ &\longrightarrow \underline{u}_s \end{aligned}$$

tenemos una onda de entropía (pues para la fase superfluida, $S=0$) \Rightarrow segundo sonido.

⊗ La ausencia de fricción en He II se entiende recordando que

$\mu = \zeta n k T \sim \sqrt{T}$, y se anula en ausencia de excitación térmica

y de colisiones. (Idem con un superconductor, con $\sigma = \frac{n q^2 \zeta}{m} \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$)
y $\sigma \xrightarrow{T \rightarrow 0} \infty$

Consideremos el estado en reposo del superfluido:

$$|\psi_0\rangle = \overbrace{|\varphi\rangle |\varphi\rangle \dots |\varphi\rangle}^{N \text{ veces}} \leftarrow \text{es simétrico pues todos los bosones están en el fundamental.}$$

Normalización: $\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = N$

$$\psi_0(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_N) = \langle \underline{r}_1 \underline{r}_2 \dots \underline{r}_N | \psi_0 \rangle$$

Puedo desplazar a todo el sistema como un rígido aplicando una traslación (transf. de Galileo):

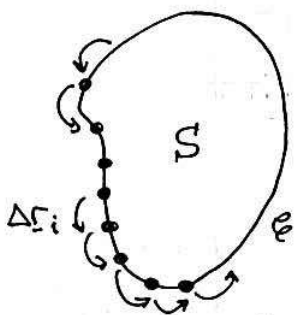
$$|\psi\rangle = e^{i\underline{p} \cdot \underline{r} / \hbar} |\psi_0\rangle \quad \text{con } \left\{ \begin{array}{l} \underline{p} = Nm \underline{u}_s \\ \underline{r} = \frac{1}{N} \sum_i \underline{r}_i \quad (\text{centro de masa}) \end{array} \right.$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar} Nm \underline{u}_s \cdot \frac{1}{N} \sum_i \underline{r}_i} |\psi_0\rangle$$

Si quiero generar un flujo, puedo aplicar una transformación con una \underline{u}_s distinta para cada partícula (pero suficientemente lenta para que $\underline{u}_s(\underline{r})$ varíe lentamente comparado con λ).

$$\Rightarrow |\psi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} m \sum_i \underline{u}_{si} \cdot \underline{r}_i} |\psi_0\rangle$$

Supongamos que desplazo los bosones un $\Delta \underline{r}_i$ a lo largo de una curva cerrada. El cambio de fase es:



$$\Delta \varphi = \frac{m}{\hbar} \sum_i \underline{u}_{si} \cdot \Delta \underline{r}_i = 2\pi n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Para $\Delta \underline{r}_i \rightarrow 0$

$$\Gamma = \oint_S \underline{u}_s \cdot d\underline{l} = \frac{2\pi \hbar}{m} n = \frac{h}{m} n = \Gamma_0 n$$

↑ obtengo el mismo estado pues las part. son indistinguibles

↑ cuanto de circulación

y la circulación está cuantizada!

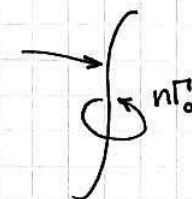
Además $\Gamma = \int_S \underline{\omega}_s \cdot d\underline{S} = \oint_S \underline{u}_s \cdot d\underline{l} \quad \text{con } \underline{\omega}_s = \nabla \times \underline{u}_s$

y si $\underline{\omega}_s$ es regular, en una región sin agujeros, al tender

$S \rightarrow 0$, Γ debe tender a cero. Pero como Γ está cuantizada no puede ir suavemente a cero $\Rightarrow \boxed{\omega_s = 0}$ en regiones sin agujeros.

\Rightarrow El flujo es potencial salvo en líneas

de vorticidad con circulación cuantizada y $\rho_s = 0$



Otra forma de verlo es volver a

$$|\psi\rangle = e^{i\frac{p \cdot r}{\hbar}} |\psi_0\rangle$$

y tomar

$$\langle r | \psi \rangle = \psi(r) = \sqrt{N} e^{i\varphi}$$

\uparrow centro de masa de cada elemento de fluido

$$\Rightarrow \rho(r) = m \psi^* \psi$$

$$\gamma \underline{j} = \rho \underline{u}_s = \frac{m i \hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi)$$

$$\Rightarrow \underline{u}_s = \frac{i \hbar}{2m} \left(\frac{\nabla \psi^*}{\psi^*} - \frac{\nabla \psi}{\psi} \right) = \frac{i \hbar}{2m} i (-\nabla \varphi - \nabla \varphi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{u}_s = \nabla \left(\frac{\hbar}{m} \varphi \right)}$$

y el flujo es potencial excepto en puntos donde la fase es singular. \rightarrow (solo puede pasar sobre una línea en 3D)

En un superconductor, la condición equivalente es

$$\nabla \times \underline{A} = \underline{B} = 0 \quad \text{excepto en vórtices magnéticos,}$$

y la condición sobre la circulación se convierte en una condición sobre el flujo magnético:

$$\int_S \underline{B} \cdot d\underline{s} = n \frac{hc}{2e} \Phi_0 \quad (\text{cuanto de flujo magnético})$$

y la carga es $2e$ por el par de Cooper.

Modelo de Ising

Hasta ahora, vimos mayormente sistemas sin acoplamiento. Al agregar acoplamiento podemos tener cambios de fase. Un ejemplo es el fenómeno del ferromagnetismo, donde para $T < T_c$ los spines se alinean espontáneamente y dan lugar a un campo magnético macroscópico. El modelo de Ising es una forma cualitativa de estudiar este fenómeno, y otras transiciones de fase.

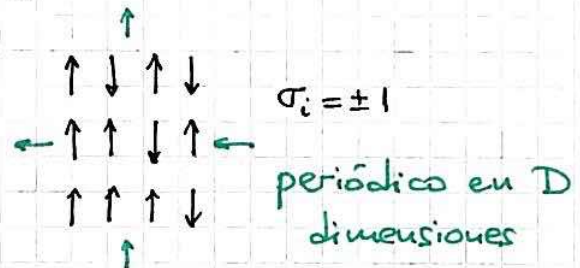
Consideremos el hamiltoniano

$$H = -J \sum_{ij/P.V.} \sigma_i \sigma_j - \mu B \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

mom. dipolar magnético de i partícula

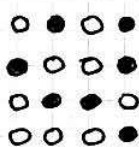
con $\begin{cases} J > 0 & \text{ferromagnético} \\ J < 0 & \text{antiferromagnético} \end{cases}$ (energía de interacción)

y un arreglo de spines:



Existen varios sistemas equivalentes:

+ Gas en una red:



$$\sigma_i = 0, 1$$

vacío ocupado

$$H = -\epsilon N_p$$

energía de interacción

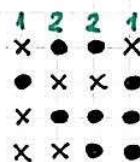
nro. de pares de primeros vecinos

+ Aleación: $H = \epsilon_1 N_{11} + \epsilon_2 N_{22} + \epsilon_{12} N_{12}$

nro. de pares de primeros vecinos 11

nro. de pares 22

nro. de pares 12



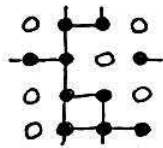
átomo 1
átomo 2

$$\sigma_i = 1, 2$$

E_j : 1 = Cu
2 = Zn

+ Absorción

+ Percolación:



libre (sin paredes)
ocupado
 $\sigma_i = 0, 1$

¿Cuál es la probabilidad de que exista un camino que una un punto arriba con otro abajo? Si existe, un líquido puede percolar.

Volviendo al ferromagnético:

La función de partición es

$$Q = \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \dots \sum_{\sigma_N} e^{-\beta H} = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{\beta \left(J \sum_{ij} \sigma_i \sigma_j + \mu B \sum_i \sigma_i \right)}$$

y la energía libre de Helmholtz

$$F = -kT \ln Q$$

luego

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q = +\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{F}{kT} \right) = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right)$$

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(-T \frac{\partial F}{\partial T} + F \right) = -\frac{\partial F}{\partial T} - T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} + \frac{\partial F}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$$

$$y \quad M = \mu \langle \sum \sigma_i \rangle = -\frac{\partial F}{\partial B} \Big|_T$$