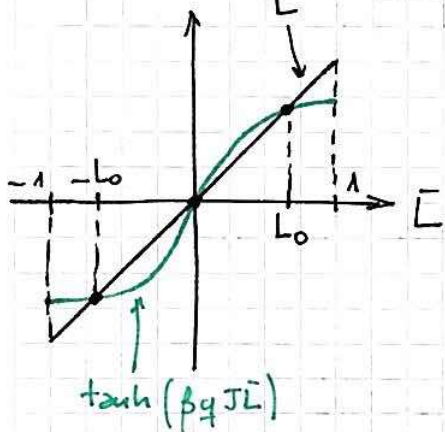


Veamos la magnetización para $B \rightarrow 0$. En ese caso

$$\bar{L} = \tanh(\beta g J \bar{L}) \quad (4)$$



tiene soluciones:

$$\bar{L} = 0 \quad \text{si } \beta g J < 1$$

$$\bar{L} = \begin{cases} -L_0 \\ 0^* \\ L_0 \end{cases} \quad \text{si } \beta g J > 1$$

Tenemos una ruptura de simetría espontánea.

El signo de $\pm L_0$ es elegido de acuerdo al signo inicial de B antes de apagarlo, es decir, del límite $B \rightarrow 0^\pm$.

* Para $\beta g J > 1$, la sol. $\bar{L} = 0$ es inestable pues corresponde a un mínimo de (3) en lugar de un máximo.

Notar que

$$M = \mu N \bar{L} \quad \text{y} \quad \chi = \left. \frac{\partial M}{\partial B} \right|_T \quad (\text{para } B \neq 0)$$

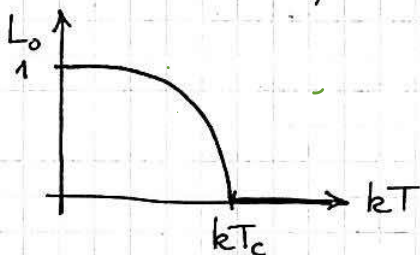
y que tenemos magnetización para

$$\beta g J = \frac{g J}{k T} > 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T < \frac{g J}{k}} \quad \text{Cambio de fase}$$

Definimos

$$\boxed{T_c = \frac{g J}{k}} \quad \text{Temperatura crítica}$$

Resolviendo (4) numéricamente se obtiene:



Finalmente, usando que

$$U = -N \bar{L} \left(\frac{g \bar{L} J}{2} + \mu B \right) \Big|_{B=0} = \begin{cases} 0 & (T > T_c) \\ -\frac{N g J L_0^2}{2} & (T < T_c) \end{cases}$$

$$\text{y } C = \frac{\partial U}{\partial T} = \begin{cases} 0 & (T > T_c) \\ -\frac{N g J}{2} \cdot 2 L_0 \frac{dL_0}{dT} & (T < T_c) \end{cases}$$

Usando (4)

$$\frac{dL_0}{dT} = -\left[\tanh^2(\beta g J L_0) - 1\right] \cdot \left(-\frac{g J L_0}{k T^2} + \frac{g J}{k T} \frac{dL_0}{dT}\right)$$

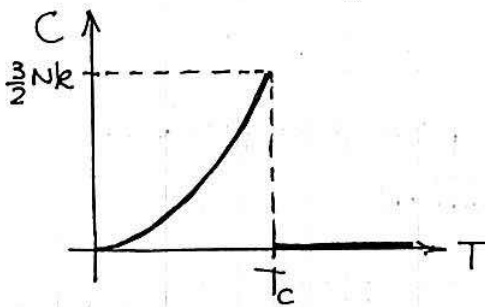
$$= -(L_0^2 - 1) \left(-\frac{T_c}{T^2} L_0 + \frac{T_c}{T} \frac{dL_0}{dT}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dL_0}{dT} = \frac{(L_0^2 - 1) L_0 T_c / T^2}{1 + (L_0^2 - 1) T_c / T}$$

$$\Rightarrow C = \frac{N k L_0^2}{\left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \frac{1}{1 - L_0^2} - \frac{T}{T_c}} \quad \text{para } T < T_c$$

Para $T \rightarrow T_c^-$, usando $\tanh x \approx x - x^3/3$

$$L_0 \approx \left[3 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)\right]^{1/2} \quad \text{y} \quad C \xrightarrow{T \rightarrow T_c^-} \frac{3}{2} N k$$



y C es discontinuo en la transición.*

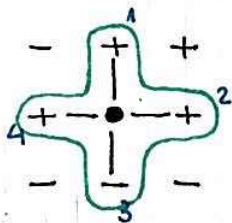
Para $T > T_c$, $C = 0$ pues no hay fluctuaciones (no hay correlación de corto rango si no hay $L \neq 0$).

* Transición de segundo orden.

Aproximación de Bethe

Veamos una corrección de 1° orden a la solución de campo medio, que nos permita tener fluctuaciones.

Tomemos un spin σ_0 en la red y sus primeros vecinos.



Podemos tratar la interacción de σ_0

con los primeros vecinos en forma exacta,

y del grupo con el resto usando campo medio:

$$H = -M B \sigma_0 - M \underbrace{(B + B')}_{\text{interacción con el resto vía } B' \text{ (aproximado)}} \sum_{i=1}^q \sigma_i - J \underbrace{\sum_{i=1}^q \sigma_0 \sigma_i}_{\text{exacto}}$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta \mu B \\ \alpha' = \beta \mu B' \\ \gamma = \beta J \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q = \sum_{\sigma_0, \sigma_i = \pm 1} e^{-\beta H} = \sum_{\sigma_0, \sigma_i} e^{\alpha \sigma_0 + (\alpha + \alpha') \sum_{i=1}^q \sigma_i + \gamma \sigma_0 \sum_{i=1}^q \sigma_i}$$

$$= Q_+ + Q_-$$

$$\text{con } Q_{\pm} = \sum_{\sigma_i = \pm 1} e^{\pm \alpha + (\alpha + \alpha' \pm \gamma) \sum_{i=1}^q \sigma_i} = e^{\pm \alpha} \sum_{\sigma_i = \pm 1} \prod_i e^{+(\alpha + \alpha' \pm \gamma) \sigma_i} =$$

$$(1) = e^{\pm \alpha} [2 \cosh(\alpha + \alpha' \pm \gamma)]^q \quad \leftarrow \text{falta conocer } B'!$$

Para que la aproximación sea consistente, debemos pedir que el valor medio de σ_0 ($= \bar{\sigma}_0$) coincida con el valor medio de σ_i :

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{Q_+ - Q_-}{Q}$$

$$\begin{aligned} \gamma \quad \bar{\sigma}_i &= \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \sigma_i = \frac{1}{q} \left(\frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial \alpha'} \right) = \\ &= \frac{1}{qQ} \left\{ e^{\alpha} [\cosh(\alpha + \alpha' + \gamma)]^{q-1} \sinh(\alpha + \alpha' + \gamma) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\alpha} [\cosh(\alpha + \alpha' - \gamma)]^{q-1} \sinh(\alpha + \alpha' - \gamma) \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma}_i = \frac{1}{Q} [Q_+ \tanh(\alpha + \alpha' + \gamma) + Q_- \tanh(\alpha + \alpha' - \gamma)]$$

Iguando

$$Q_+ - Q_- = Q_+ \tanh(\alpha + \alpha' + \gamma) + Q_- \tanh(\alpha + \alpha' - \gamma)$$

$$\Rightarrow Q_+ [1 - \tanh(\alpha + \alpha' + \gamma)] = Q_- [1 + \tanh(\alpha + \alpha' - \gamma)]$$

y usando (1):

$$(2) \quad \frac{Q_+}{Q_-} = e^{2\alpha} \frac{[\cosh(\alpha + \alpha' + \gamma)]^q}{[\cosh(\alpha + \alpha' - \gamma)]^q} = \frac{\cosh(\alpha + \alpha' + \gamma)}{\cosh(\alpha + \alpha' - \gamma)} \cdot \underbrace{\frac{\text{ch}(\delta - \gamma) + \text{sh}(\delta - \gamma)}{\text{ch}(\delta + \gamma) - \text{sh}(\delta + \gamma)}}_{(1)}$$

$\delta = \alpha + \alpha'$

Veamos ①

$$\textcircled{1} = \frac{e^{\delta-\gamma} + e^{-\delta+\gamma} + e^{\delta-\gamma} - e^{-\delta+\gamma}}{e^{\delta+\gamma} + e^{-\delta-\gamma} - e^{\delta+\gamma} + e^{-\delta-\gamma}} = \frac{2e^{\alpha} e^{\alpha'} e^{-\gamma}}{2e^{-\alpha} e^{-\alpha'} e^{-\gamma}} = e^{2\alpha} e^{2\alpha'}$$

Reemplazando

$$e^{2\alpha'} = \left[\frac{\cosh(\alpha + \alpha' + \gamma)}{\cosh(\alpha + \alpha' - \gamma)} \right]^{q-1} \quad (3)$$

que determina la magnetización via B' .

Para $B=0 \Rightarrow \alpha=0$ y

$$\alpha' = \frac{q-1}{2} \ln \left[\frac{\cosh(\alpha' + \gamma)}{\cosh(\alpha' - \gamma)} \right] \leftarrow \text{y } \alpha' = 0 \text{ si } \gamma = 0 \text{ (i.e., si } J=0)$$

y cerca de T_c , $\alpha' \ll 1$ (pues $B' \ll 1$)

$$\Rightarrow \alpha' \approx (q-1) \tanh \gamma \left(\alpha' - \operatorname{sech}^2 \gamma \cdot \frac{\alpha'^3}{3} + \dots \right)$$

$\rightarrow 1$ para tener solución $\alpha' \neq 0$
($\alpha' = 0$ es solución siempre)

$$\Rightarrow (q-1) \tanh \gamma > 1$$

$$\gamma > \tanh^{-1} \left(\frac{1}{q-1} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{q}{q-2} \right) = \gamma_c = \frac{J}{kT_c}$$

$$\Rightarrow T_c = \frac{2J}{k} \frac{1}{\ln \left(\frac{q}{q-2} \right)}$$

y para $q=2$ (caso 1D) $T_c \rightarrow 0$, como corresponde para el modelo de Ising 1D.