Solución exacta en una dimensión

Onsager

Los casos 1D y 2D pueden resolverse en forma exacta con el método de la matriz de transferencia (Kramers & Wannier).

$$\uparrow\ \downarrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \downarrow\ \downarrow\ \uparrow$$

1 2 3 ... N-1 N N+1 $=$ 1

Arreglo periódico

Tomemos periodicidad

$$\sigma_{N+1} = \sigma_1$$

Podemos simetrizar el Hamiltoniano:

$$H = -J \sum_{ij/P.V.} \sigma_i \sigma_j - \mu B \sum_{i=1}^{N} \sigma_i =$$

$$= -J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} - \frac{1}{2}\mu B \sum_{i=1}^{N} \left(\sigma_i + \sigma_{i+1}\right)$$

$$\Rightarrow Q = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} e^{\beta \sum_{i=1}^{N}\left[J\sigma_i\sigma_{i+1} + \frac{\mu B}{2}(\sigma_i+\sigma_{i+1})\right]}$$

Definamos los elementos de un operador $\hat{P}$:

$$\langle \sigma | \hat{P} | \sigma' \rangle = e^{\beta\left[J\sigma\sigma' + \frac{\mu B}{2}(\sigma+\sigma')\right]} \qquad \text{con } \sigma, \sigma' = \pm 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle 1 | \hat{P} | 1 \rangle = e^{\beta(J+\mu B)} \\ \langle -1 | \hat{P} | -1 \rangle = e^{\beta(J-\mu B)} \\ \langle 1 | \hat{P} | -1 \rangle = \langle -1 | \hat{P} | 1 \rangle = e^{-\beta J} \end{cases}$$

Podemos representar $\hat{P}$ como una matriz de 2×2

$$P = \begin{pmatrix} e^{\beta(J+\mu B)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-\mu B)} \end{pmatrix} \qquad \text{Matriz de transferencia}$$

$$\Rightarrow Q = \sum_{\sigma_1} \cdots \sum_{\sigma_N} \langle \sigma_1 | \hat{P} | \sigma_2 \rangle \langle \sigma_2 | \hat{P} | \sigma_3 \rangle \cdots \langle \sigma_{N-1} | \hat{P} | \sigma_N \rangle \langle \sigma_N | \hat{P} | \sigma_1 \rangle =$$

$$= \sum_{\sigma_1} \langle \sigma_1 | \hat{P}^N | \sigma_1 \rangle = \mathrm{Tr}\{P^N\} = \lambda_+^N + \lambda_-^N$$

autovalores de P

Calculemos los autovalores de P:

$$(P - \lambda I)\, \underline{x} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} e^{\beta(J+\mu B)} - \lambda & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-\mu B)} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(e^{\beta(J+\mu B)} - \lambda\right)\left(e^{\beta(J-\mu B)} - \lambda\right) - e^{-2\beta J} =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda\, e^{\beta J} \cosh(\beta\mu B) + 2\sinh(2\beta J) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_\pm = e^{\beta J}\cosh(\beta\mu B) \pm \sqrt{e^{2\beta J}\sinh^2(\beta\mu B) + e^{-2\beta J}}$$

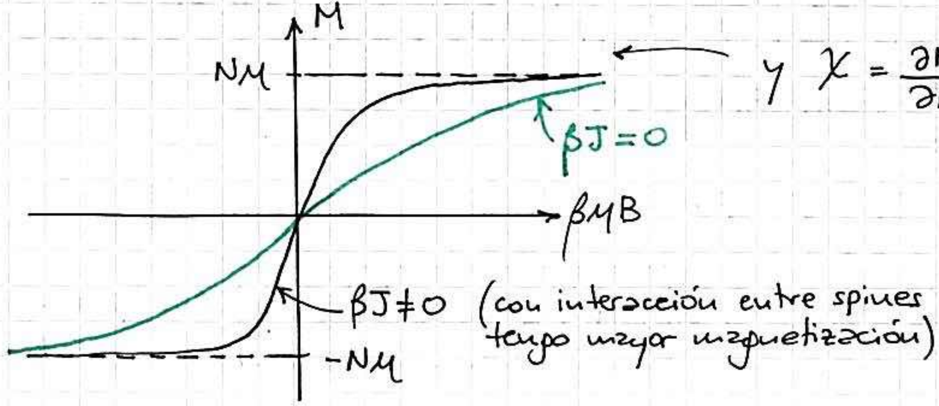
Notar que $\lambda_+ > \lambda_-$, y para $N \gg 1$, $\lambda_+^N \gg \lambda_-^N$. Luego

$$\ln Q = \ln\left(\lambda_+^N + \lambda_-^N\right) \approx N \ln \lambda_+ =$$
$$= N \ln\left\{ e^{\beta J}\left[\cosh(\beta\mu B) + \sqrt{\sinh^2(\beta\mu B) + e^{-4\beta J}}\right]\right\}$$

luego $F = -kT \ln Q = -\frac{\ln Q}{\beta}$

$$\boxed{F = -NJ - NkT \ln\left[\cosh(\beta\mu B) + \sqrt{\sinh^2(\beta\mu B) + e^{-4\beta J}}\right]}$$

y $M = -\left.\frac{\partial F}{\partial B}\right|_T \Rightarrow \boxed{\frac{N\mu \sinh(\beta\mu B)}{\sqrt{\sinh^2(\beta\mu B) + e^{-4\beta J}}} = M}$



y $\chi = \left.\frac{\partial M}{\partial B}\right|_T$ se vuelve singular en $B=0$ para $T \to 0$!

Veamos el orden (o desorden) en el sistema. ¿Tenemos configuraciones: ↑↓↑↓↑↓

ó ↑↑↑↓↓↑ ?

Antes usamos N_{++} para ver el orden de corto rango.

Calculemos $\langle \sigma_k \sigma_{k+1} \rangle$ para algún k fijo. Para $B=0$ puedo escribir:

$$(1)\quad Q = \sum_{\sigma_1} \cdots \sum_{\sigma_N} e^{\beta \sum_{i=1}^{N} J_i \sigma_i \sigma_{i+1}} =$$

$J_i = J \;\forall i$, pero es cómodo etiquetar las interacciones entre diferentes pares.

$$= \underbrace{\sum_{\sigma_1} \cdots \sum_{\sigma_{N-1}} e^{\beta \sum_{i=1}^{N-1} J_i \sigma_i \sigma_{i+1}}}_{\parallel} \sum_{\sigma_N = \pm 1} e^{\beta J_N \sigma_N \sigma_{N+1}} =$$

$$= Q_{N-1} \quad 2\cosh(\beta J_N \sigma_{N+1}) = Q_{N-1}\, 2\cosh(\beta J_N)$$

pues cosh es par y $\sigma_{N+1} = +1$ ó -1

Q para N-1 spines

Idem $Q_{N-1} = Q_{N-2} \cdot 2\cosh(\beta J_{N-1})$

$$\Longrightarrow \quad Q = 2^N \prod_{i=1}^{N} \cosh(\beta J_i)$$

y $$\ln Q = N \ln 2 + \sum_{i=1}^{N} \ln[\cosh(\beta J_i)]$$

Ahora, de (1)

$$\langle \sigma_k \sigma_{k+1} \rangle = \frac{1}{Q} \frac{1}{\beta} \frac{\partial Q}{\partial J_k} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial J_k} \ln Q = \tanh(\beta J_k)$$

Calculemos ahora la correlación entre spines separados r posiciones

$$\langle \sigma_k \sigma_{k+r} \rangle = \langle (\sigma_k \sigma_{k+1})(\sigma_{k+1} \sigma_{k+2}) \cdots (\sigma_{k+r-1} \sigma_{k+r}) \rangle$$ ← pues $\sigma_i^2 = 1 \ \forall i$

$$= \frac{1}{Q} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial J_k} \right) \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial J_{k+1}} \right) \cdots \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial J_{k+r-1}} \right) Q =$$

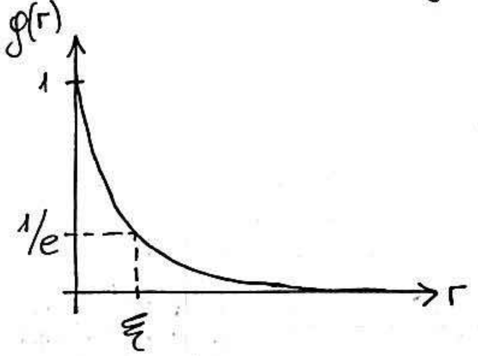
$$= \prod_{i=k}^{k+r-1} \tanh(\beta J_i)$$

Usando que $J_i = J \ \forall i$.

$$\Longrightarrow \quad \langle \sigma_k \sigma_{k+r} \rangle = \boxed{\rho(r) = \tanh^r(\beta J)}$$ función de correlación

Puedo escribir $$\rho(r) = e^{-r/\xi} \quad \text{con} \quad \boxed{\xi = \frac{1}{\ln[\coth(\beta J)]}}$$

← long. de correlación



Para $\beta J \gg 1$

$$\xi \approx \frac{1}{2} e^{2\beta J} \xrightarrow[T \to 0]{} \infty$$

y la longitud de correlación diverge cerca del punto crítico.