Teoría fenomenológica de Landau

Consideremos un parámetro de orden m, con campo de orden h.

$$m_0 = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \neq 0 & T < T_c \end{cases} \qquad (\text{para } h = 0).$$

Para $T \approx T_c^-$, $m_0 \ll 1$ y para una transformación de 2^{do} orden puedo desarrollar la energía libre en potencias de m_0

$$\frac{F_0}{NkT} = \Phi_0(t, m_0) = q(t) + r(t)\, m_0^2 + s(t)\, m_0^4 + \dots$$

para $h=0$

energía libre de Landau

pot. pares en m_0 pues debe ser simétrico en m_0 para $h=0$

y donde puedo desarrollar

$$q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k t^k \;,\quad r(t) = \sum_k r_k t^k \;,\quad s(t) = \sum_k s_k t^k \;, \dots$$

dependen del sistema

Truncuemos en m_0^4 y asumamos $s(t)>0$. En el equilibrio

$$\delta\Phi_0 = 0 = \delta m_0 \cdot m_0 \Big[\underbrace{2\, r(t) + 4 s(t) m_0^2}_{=0}\Big]$$

$$\Rightarrow m_0 = \begin{cases} 0 \\ \pm\sqrt{-\dfrac{r(t)}{2 s(t)}} \end{cases}$$

Para transición de fase de 2° orden quiero tener soluciones continuas

$$m_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \neq 0 & \text{si } t>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r(t) > 0 & \text{si } t<0 \\ r(t)<0 & \text{si } t>0 \end{cases} \quad \Rightarrow r_0 = 0 \;\; y \;\; r \simeq r_1 t \;\; \text{con } r_1<0$$

luego, al orden mas bajo

$$m_0 = \begin{cases} 0 & T>T_c \;\text{ ó }\; t<0 \\ 0, \pm\sqrt{\dfrac{|r_1|}{2 s_0}}\, t^{1/2} & T<T_c \;\text{ ó }\; t>0 \end{cases}$$

inestable

$s_0>0$

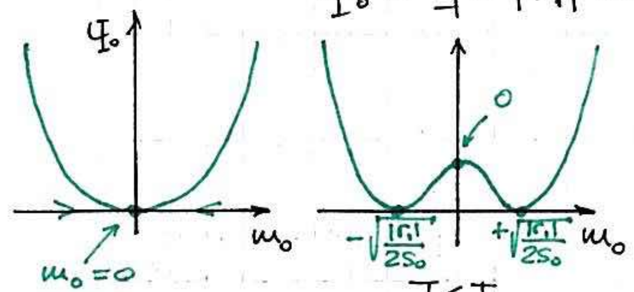
¡y se sigue que $\boxed{m_0 \sim t^{1/2}}$ como en Ising y Van der Waals!

$\boxed{\beta = 1/2}$

Veamos que $m_0 = 0$ es inestable para $T<T_c$. Reemplazando

la expansión en Ψ_0

$$\Psi_0 = q - |r_1| t\, m_0^2 + s_0 m_0^4$$



$T > T_c$ $t < 0$

$T < T_c$ $t > 0$

y tengo ruptura espontánea de la simetría.

Si las condiciones $s(t) > 0$ y $r_1 < 0$ no se satisfacen, debemos expandir a orden m^6 y tendremos ptos. tricríticos.

Ejemplo: Ising con campo medio. Teníamos (para $B = 0$)

$$\frac{F_0}{NkT} = -\frac{\ln Q}{N} = -\frac{\beta q J}{2} L^2 + \left(\frac{1+L}{2}\right)\ln\left(\frac{1+L}{2}\right) + \left(\frac{1-L}{2}\right)\ln\left(\frac{1-L}{2}\right)$$

$$\text{con } L = \frac{M}{\mu N} \quad \text{y} \quad L = \tanh(\beta q L)$$

Expandiendo por Taylor para $L \ll 1$

$$\Psi_0 \simeq J^3 q^3 \beta^3 \Big[-\frac{\ln 2}{J^3 q^3 \beta^3} \underbrace{-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{J\beta q}\right)}_{\shortparallel} L^2 + \overbrace{\frac{J\beta q}{12}\left(4 J\beta q - 3\right)}^{\substack{s(t) \\ \shortparallel}} L^4 \Big]$$

$$r(t) = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{T}{T_c}\right) = -\frac{1}{2} t$$

$$\Rightarrow r_1 = -\frac{1}{2}$$

y s_0 sale de pedir $T = T_c \Rightarrow J\beta q = 1$ y $s_0 = \frac{1}{12}$

y $\boxed{L_0 = \frac{M_0}{\mu N} \sim t^{1/2}}$

Veamos el caso con campo de orden $h \neq 0$. Ahora

$$\Psi(t, m) = q(t) - hm + r(t) m^2 + s(t) m^4$$

trabajo

y $\delta\Psi = 0 = \delta m \cdot \left[-h + 2r(t) m + 4 s(t) m^3\right]$

$$\Rightarrow h = 2r(t) m + 4s(t) m^3 \quad \text{y para } t = 0, \ h = 4s(t) m^3$$

y $\boxed{m \sim h^{1/3}} \Rightarrow \boxed{\delta = 3}$

Además $\left.\frac{\partial h}{\partial m}\right)_t = 2r(t) + 12s(t)m^2 \xrightarrow[m \to 0]{t \to 0^+} 2r_1 t$

$$\Rightarrow \chi = \left.\frac{\partial m}{\partial h}\right)_t \sim t^{-1} \quad y \quad \boxed{\gamma = 1}$$

Calculando $C = -\left.\frac{\partial^2 F_0}{\partial t^2}\right)_{m \to 0}$ sale $\boxed{\alpha = 0}$ y se obtienen todos los exp. críticos.

<u>Teoría de Landau-Ginzburg</u>

Si queremos mantener información espacial del parámetro de orden, podemos usar $m(\underline{x})$ en lugar de m_0. Landau y Ginzburg propusieron usar

$$F = \int dV \left[F_0 + a(t)m^2 + b(t)m^4 + c(t)\underbrace{|\underline{\nabla} m|^2}_{\underline{\nabla}m \cdot \underline{\nabla}m} \right]$$

penaliza fluctuaciones espaciales ("los spines prefieren estar alineados").

Notar que si $m = \psi(x)$, $|\underline{\nabla}\psi|^2 \sim p^2$ y es la energía cinética.

$$\Rightarrow \delta F = 0 = \int dV \left[\delta m (2am + 4bm^3) + 2c \underbrace{\underline{\nabla} m \cdot \underline{\nabla} \delta m}_{\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}m\, \delta m) - \nabla^2 m\, \delta m} \right] =$$

$$= \int dV\, \delta m \left(2am + 4bm^3 - 2c\nabla^2 m \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{c\nabla^2 m = am + 2bm^3}$$

que se reduce al caso anterior si $m = cte$

Ejemplo: para un superfluido tomemos ψ como parám. de orden

$$F = \int dV \left[F_0 + a\underbrace{|\psi|^2}_{\psi\psi^*} + b\underbrace{|\psi|^4}_{\psi^2\psi^{*2}} + c\underbrace{|\underline{\nabla}\psi|^2}_{\underline{\nabla}\psi^* \cdot \underline{\nabla}\psi} \right]$$

Variando respecto a $\delta\psi^*$:

$$\cancel{\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\psi\,\delta\psi^*)} - \nabla^2\psi\,\delta\psi^*$$

$$\delta f = 0 = \int dv\left[\delta\psi^*(a\psi + 2b\psi^*\psi^2) + c\,\underline{\nabla}\psi\cdot\underline{\nabla}\delta\psi^*\right]$$

$$\Longrightarrow\ c\nabla^2\psi = a\psi + 2b|\psi|^2\psi$$

y se parece mucho a la ec. de Schrödinger estacionaria.

Asociando, a $T \approx 0$: $\quad c = \dfrac{\hbar^2}{2m}$, $a = V_{ext}$, $b = \dfrac{2\pi\hbar^2 N}{m}\alpha$

long. de scattering (intensidad de interacción entre bosones

$$\Longrightarrow\ \boxed{\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = V_{ext}(\underline{x})\,\psi + \frac{4\pi\hbar^2 N\alpha}{m}|\psi|^2\psi}$$

Ec. de Gross-Pitaevskii indep. de t