

Hipótesis de invariancia de escala

El modelo de Landau nos permite entender por qué tenemos universalidad, y hasta nos da algunas clases de universalidad (dependiendo de los signos de Γ_k y S_k). Pero los exponentes que obtenemos son los de campo medio, y las clases de universalidad son demasiado grandes.

El siguiente paso para entender la existencia de clases de universalidad con iguales exponentes es asumir invariancia de escala (justificada luego por grupo de renormalización).

Cerca del pto. crítico $\xi \rightarrow \infty$

$$\gamma \quad C(r) \sim r^{-p} \quad \text{con } p = d - 2 + \eta$$

Esta función es invariante de escala. Tomando un cambio

$$r' = \frac{r}{\ell} \quad \Rightarrow \quad C\left(\frac{r}{\ell}\right) = \left(\frac{r}{\ell}\right)^{-p} = \ell^p r^{-p} = \ell^p C(r)$$

y obtengo la misma función salvo por el factor de escala.

Vamos a asumir que todas las variables termodinámicas intensivas son inv. de escala cerca del pto crítico.

→ pues deben ser indep.
del volumen.

Veamos las unidades de Φ/V ← normalizo con V en lugar de N para que sirva para otros sist. además de Ising.

$$\left[\frac{\Phi}{V} \right] = \left[\frac{F}{kTV} \right] = \left[\frac{\ln Q}{V} \right] = L^{-d}$$

luego puedo escribir $\frac{\Phi}{V}(u, t) = \ell^{-d} f\left(\frac{u}{\ell^D}, \frac{t}{\ell^A}\right)$ ← func. adimensional

Veamos si todos estos exponentes son independientes. Cerca del punto crítico, la única longitud relevante que tiempo es $\xi \sim t^{-\nu}$

$$\Rightarrow \left[\frac{\Phi}{V} \right] = L^{-d} \sim \xi^{-d} \sim t^{\nu d}$$

y $C = \frac{1}{V} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \sim t^{-\alpha} \Rightarrow \frac{\Phi}{V} \sim t^{2-\alpha} \Rightarrow \boxed{Vd = 2 - \alpha}$ Josephson
intensiva

De $\left[\frac{M}{V} \right] = \sqrt{[C(0)]} = L^{\frac{(d-2+\eta)}{2}} \sim t^{\nu \frac{(d-2+\eta)}{2}} \sim t^\beta$ ← func. de correlación
 $\Rightarrow 2\beta = -\nu(2-d-\eta)$ (1)

De $M = \frac{\partial F}{\partial B} \Rightarrow \left[\frac{M}{V} \right] = \frac{[F/kTV]}{[B/kT]} \rightarrow L^{-d}$
 $\Rightarrow \left[\frac{B}{kT} \right] = L^{-d} L^{\frac{(d-2+\eta)}{2}} = L^{\frac{(-d-2+\eta)}{2}} \sim t^{\nu \frac{(d+2-\eta)}{2}} \sim M^\delta \sim t^{\beta\delta}$
 $\Rightarrow 2\beta\delta = \nu(2+d-\eta)$ (2)

y $[kT\chi] = \frac{[M/V]}{[B/kT]} \sim t^{\nu \frac{(d-2+\eta)}{2}} t^{-\nu \frac{(d+2-\eta)}{2}} \sim t^{\nu(\eta-2)} \sim t^{-\gamma}$
 $\Rightarrow \boxed{\gamma = \nu(2-\eta)}$ Fisher

Combinando (1) y (2) con Fisher y Josephson:

$$\boxed{\alpha + 2\beta + \gamma = 2}$$
 Rushbrooke

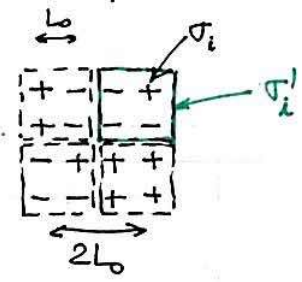
$$\boxed{\gamma = \beta(\delta - 1)}$$
 Widom

Estas cuatro igualdades valen para muchos sistemas y reducen los exponentes críticos independientes a solo dos. Esos dos definen las clases de universalidad, y el resto de los exponentes para la clase salen de las igualdades.

Nos falta una teoría que justifique la invariancia de escala y nos permita calcular los dos exponentes independientes.

Grupo de Renormalización (Kadanoff, Wilson)

Consideremos un Hamiltoniano H_0 , con escala L_0 (por ej., para spines separados L_0). Dada una transformación



$$L_0 \rightarrow 2L_0 \leftarrow \text{"decimar"}$$

$$\Rightarrow H_1 = R(H_0)$$

Puedo repetir:

$$L_0 \rightarrow 2L_0 \quad H_1 = R(H_0)$$

$$2L_0 = L_1 \rightarrow 4L_0 \quad H_2 = R(H_1) = R(R(H_0))$$

la transf. tiene propiedades de grupo

Si para algún n $H_{n+1} = H_n \Rightarrow \exists$ un pto. fijo para el que el sist. es invariante de escala (pto. crítico).

La existencia del punto fijo

$$R(H_n) = H_n$$

justifica las hipótesis anteriores y nos permite calcular exponentes críticos. Además, todos los sist. con el mismo punto fijo pertenecerán a la misma clase de universalidad.

Ejemplo: Ising en 1D

Tenemos

$$H = - \sum_i \left[H_0 + J \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{1}{2} \mu B (\sigma_i + \sigma_{i+1}) \right] \quad (H_0 = 0)$$

(apropiamos H_0 para facilitar las relaciones de recurrencia).

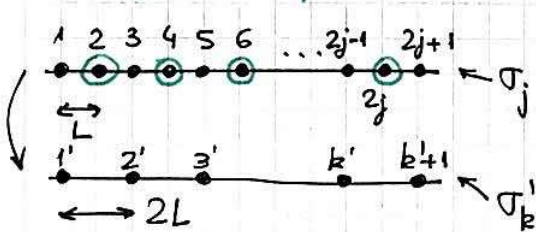
$$\left. \begin{array}{l} K_0 = 0 \\ K_1 = \beta J \\ K_2 = \beta 4B \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow Q = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{\sum_{i=1}^N [K_0 + K_1 \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{K_2}{2} (\sigma_i + \sigma_{i+1})]} =$$

$$= \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_{i=1}^N e^{K_0 + K_1 \sigma_i \sigma_{i+1} + \frac{1}{2} K_2 (\sigma_i + \sigma_{i+1})} = \quad (1)$$

$$= \sum_{\{\sigma_{2j-1}\}} \sum_{\{\sigma_{2j}\}} \prod_{j=1}^{N/2} e^{2K_0 + K_1 (\sigma_{2j-1} \sigma_{2j} + \sigma_{2j} \sigma_{2j+1}) + \frac{1}{2} K_2 (\sigma_{2j-1} + 2\sigma_{2j} + \sigma_{2j+1})}$$

$\sigma_{\text{impares}} \quad \sigma_{\text{pares}}$



Sumamos sobre los spines pares para obtener una nueva malla separada por $2L$:

$$= \sum_{\{\sigma_{2j-1}\}} \prod_{j=1}^{N/2} e^{2K_0} 2 \cosh [K_1 (\sigma_{2j-1} + \sigma_{2j+1}) + K_2] e^{\frac{1}{2} K_2 (\sigma_{2j-1} + \sigma_{2j+1})}$$

\leftarrow sumando $\sigma_{2j} = \pm 1$

Enviamos ahora $\sigma_{2j-1} \rightarrow \sigma'_k \leftarrow$ los nuevos spines sobre la malla "renormalizada"

$$\Rightarrow Q' = \sum_{\{\sigma'_k\}} \prod_k e^{2K_0} 2 \cosh [K_1 (\sigma'_k + \sigma'_{k+1}) + K_2] e^{\frac{1}{2} K_2 (\sigma'_k + \sigma'_{k+1})}$$

De (1): $e^{K'_0 + K'_1 \sigma'_k \sigma'_{k+1} + \frac{1}{2} K'_2 (\sigma'_k + \sigma'_{k+1})}$
para tener el punto fijo.

Estas relaciones deben satisfacerse para todos los valores posibles de σ'_k y σ'_{k+1} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma'_k = \sigma'_{k+1} = 1 : \quad e^{K'_0 + K'_1 + K'_2} = 2e^{2K_0 + K_2} \cosh (2K_1 + K_2) \\ \sigma'_k = -\sigma'_{k+1} = -1 : \quad e^{K'_0 + K'_1 - K'_2} = 2e^{2K_0 - K_2} \cosh (K_2 - 2K_1) \\ \sigma'_k = -\sigma'_{k+1} = \pm 1 : \quad e^{K'_0 - K'_1} = 2e^{2K_0} \cosh K_2 \end{array} \right.$$

Despejando

Nota que $k_0' \neq 0$ aun si $k_0 = 0$

$$k_0' = \ln 2 + 2k_0 + \frac{1}{4} \ln [\operatorname{ch}(2k_1 + k_2) \operatorname{ch}(2k_1 - k_2) \operatorname{ch}^2 k_2]$$

$$k_1' = \frac{1}{4} \ln [\operatorname{ch}(2k_1 + k_2) \operatorname{ch}(2k_1 - k_2)] - \frac{1}{2} \ln (\operatorname{ch} k_2)$$

$$k_2' = k_2 + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\operatorname{ch}(2k_1 + k_2)}{\operatorname{ch}(2k_1 - k_2)} \right]$$

Transformación
del
grupo de
renormalización