K_0' solo afecta la parte regular de la energía libre, pues $F = -kT \ln Q$ y el término e^{2K_0} contribuye términos aditivos. La parte singular está controlada por K_1' y K_2'.

Veamos los puntos fijos $\underline{K}^* = \begin{pmatrix} K_1^* \\ K_2^* \end{pmatrix}$ t.q. $\underline{K}^* = R(\underline{K}^*)$:

1) $K_1^* = 0$, $K_2^* \neq 0$ corresponde a $J=0$ o $T \to \infty$

Es un pto. fijo <u>trivial</u> (sistema desordenado).

2) $K_1^* \to \infty$, $K_2^* = 0$ corresponde a $B=0$ y $T \to 0$

En el entorno del punto fijo puedo expandir

matriz de la transformación

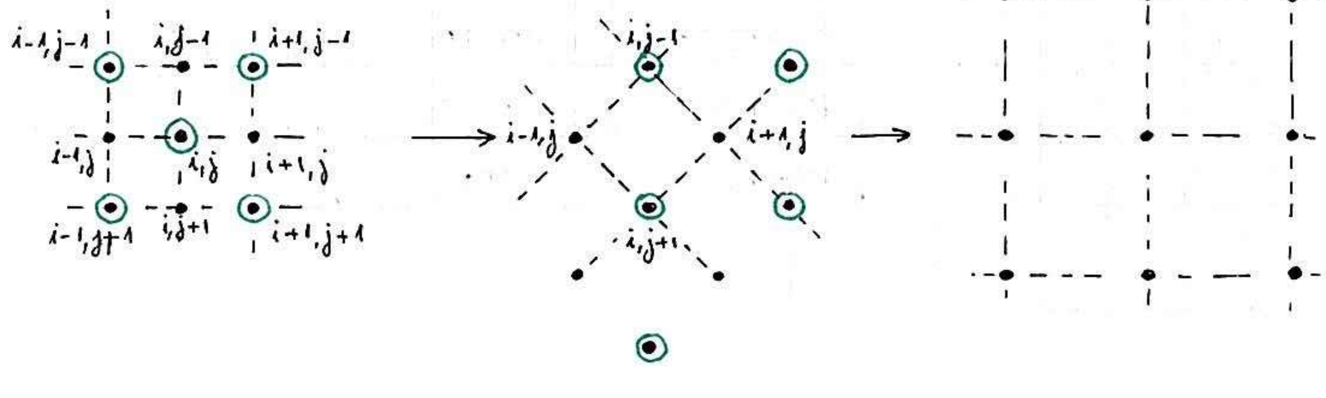
$$\left\{\begin{array}{l} \underline{K} = \underline{K}^* + \underline{k} \\ \underline{K}' = \underline{K}^* + \underline{k}' \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{K}' = R(\underline{K}) \Rightarrow \left.\frac{d\underline{R}}{d\underline{K}}\right|_{\underline{K}=\underline{K}^*} \underline{k} = \underline{\underline{A}}\,\underline{k} = \underline{k}'$$

y para el segundo punto fijo

$$\left\{\begin{array}{l} k_1' \approx k_1 \\ k_2' \approx 2k_2 \end{array}\right. \quad \text{y el punto fijo es inestable!}$$

<u>Grupo de renormalización para Ising en 2D</u>

"Decimo" el problema de la siguiente forma:



Escribamos el Hamiltoniano para $B=0$

$$H = -J \sum_{i,j} \left(\sigma_{ij}\, \sigma_{i+1,j} + \sigma_{ij}\, \sigma_{i,j+1} \right)$$

$$\Rightarrow Q = \sum_{\{\sigma_{ij}\}} \prod_{i,j} e^{K_1 (\sigma_{ij}\sigma_{i+1,j} + \sigma_{ij}\sigma_{i,j+1})}$$

$K_1 = \beta J$

Para un par $\{i,j\}$ fijo, y mirando todos sus primeros vecinos tenemos

$$\sum_{\sigma_{ij}=\pm 1} e^{K_1 \sigma_{ij} (\sigma_{i+1,j} + \sigma_{i-1,j} + \sigma_{i,j+1} + \sigma_{i,j-1})} =$$

$$= \underbrace{2\cosh\left[K_1 \left(\sigma_{i+1,j} + \sigma_{i,j+1} + \sigma_{i-1,j} + \sigma_{i,j-1} \right) \right]}_{/\!/}$$

tengo 16 elecciones para los signos de los 4 spines. 4 elecciones son indep. y necesito 4 constantes K_i'

$$\exp\Big\{ K_0' + \frac{K_1'}{2} \left(\sigma_{i-1,j}\,\sigma_{i,j-1} + \sigma_{i,j-1}\,\sigma_{i+1,j} + \sigma_{i+1,j}\,\sigma_{i,j+1} + \sigma_{i,j+1}\,\sigma_{i-1,j} \right) +$$
$$+ K_2' \left(\sigma_{i-1,j}\,\sigma_{i+1,j} + \sigma_{i,j-1}\,\sigma_{i,j+1} \right) + K_3'\, \sigma_{i,j-1}\,\sigma_{i+1,j}\,\sigma_{i,j+1}\,\sigma_{i-1,j} \Big\}$$

Necesito el 1/2 porque expandí sobre todos los primeros vecinos. Al sumar $\forall i,j$ cuento dos veces los pares

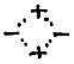
segundos vecinos

Necesito una cte. más: aparecen interacciones de cuatro spines

Al repetir el proceso aparecerán interacciones de aún más largo rango. Vamos a truncar la expansión y asumir $K_3' \ll 1$. Y de las 16 elecciones de $\sigma = \pm 1$, tengo 4 ec. independientes:

 $2\,\mathrm{ch}(4K_1) = e^{K_0' + 2K_1' + 2K_2' + K_3'}$

 $2\,\mathrm{ch}(2K_1) = e^{K_0' - K_3'}$

 $2 = e^{K_0' - 2K_1' + 2K_2' + K_3'}$

 $2 = e^{K_0' - 2K_2' + K_3'}$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_0' = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln(\mathrm{ch}(2K_1)) + \frac{1}{8}\ln(\mathrm{ch}(4K_1)) \\ K_1' = \frac{1}{4}\ln(\mathrm{ch}(4K_1)) \\ K_2' = \frac{1}{8}\ln(\mathrm{ch}(4K_1)) \\ K_3' = \frac{1}{8}\ln(\mathrm{ch}(4K_1)) - \frac{1}{2}\ln(\mathrm{ch}(2K_1)) \end{cases}$$

Nuevamente K_0' solo controla la parte regular de la energía libre. Despreciando K_3' la transformación queda

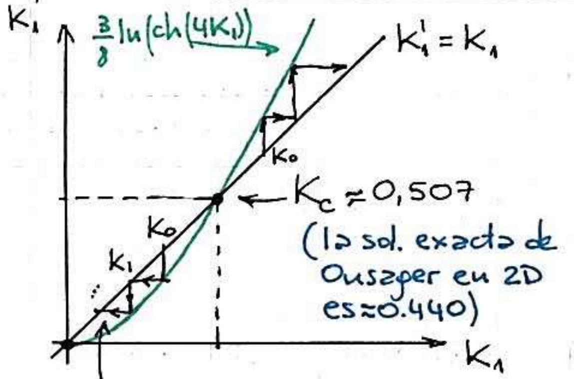
$$\boxed{\begin{aligned} K_1' &= \frac{1}{4}\ln\left(ch(4K_1)\right) \\ K_2' &= \frac{1}{8}\ln\left(ch(4K_1)\right) \end{aligned}}$$

y puede resolverse numéricamente.

O podemos aproximar aún mas: como tanto el efecto de los 1° y 2° vecinos es alinear los spines, podemos despreciar K_2' y corregir K_1' con un efecto "efectivo"

$$K_1' \approx K_1' + K_2' = \frac{1}{4}\ln\left(ch(4K_1)\right) + \frac{1}{8}\ln\left(ch(4K_1)\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{K_1' = \frac{3}{8}\ln\left(ch(4K_1)\right)}$$



Iteraciones $K_{n+1} = \frac{3}{8}\ln(ch(4K_1))$ me alejan del pto. crítico.

Tiene tres puntos fijos:

1) $K_1^* = 0$ es trivial ($J = 0$ o $T \to \infty$). Corresponde al sistema desordenado.

2) $K_1^* \to \infty$ es trivial ($J \to \infty$ o $T \to 0$). También es estable.

3) $K_1^* = K_c = \frac{J}{kT_c} \approx 0{,}507$

es inestable y corresponde al caso en el que la long. de correlación diverge (transición de fase).

Calculemos los exponentes críticos: Como el sistema es autosimilar, uso invariancia de escala. Tenemos que

"vector de estado"

$$\frac{\Psi}{V}(K) = \ell^{-d}\,\frac{\Psi}{V}(K') \qquad \text{con} \begin{cases} \ell = \sqrt{2} \\ d = 2 \end{cases}$$

el cambio de factor de escala en esta transformación

y en el entorno del punto fijo

$$\delta k' = K' - K_c \approx \left.\frac{\partial R}{\partial K}\right|_{K_c} \delta k = \underbrace{\left.\frac{\partial R}{\partial K}\right|_{K_c}}_{\lambda} (K - K_c) \qquad (1)$$

y

$$K - K_c = \frac{J}{k}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_c}\right) = \frac{J}{kT}\left(1 - \frac{T}{T_c}\right) = K t \qquad (2)$$

De (1)

$$\delta k' = \lambda\,\delta k \equiv \ell^{y}\,\delta k$$

por ser autosimilar

En la energía libre

$$\Rightarrow \quad \frac{\Psi}{V}(\delta k) = \ell^{-d} \frac{\Psi}{V}(\overbrace{\ell^{y}\delta k}^{\delta k'})$$

y de (2) $\Rightarrow \quad \frac{\Psi}{V}(t) = \ell^{-d} \frac{\Psi}{V}(\ell^{y} t)$

Esta ecuación es válida para cualquier cambio de escala ℓ. Para $\ell \sim |t|^{-1/y}$ $\Rightarrow \quad \frac{\Psi}{V}(t) = |t|^{d/y} \frac{\Psi}{V}\left(\frac{t}{|t|}\right)$

De invarianza de escala: $\frac{d}{y} = 2 - \alpha \quad (3)$

función adimensional

Calculemos el valor de y. De $\lambda = \ell^{y}$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{\ln \lambda}{\ln \ell} = \frac{1}{\ln \ell} \ln\left(\left.\frac{\partial R}{\partial K}\right|_{K_c}\right) = \frac{1}{\ln \ell} \cdot \ln\left(\frac{3}{2} \tanh(4K_c)\right) \approx$$

$\ell = \sqrt{2}$

$$\approx 1{,}070$$

Reemplazando en (3) $\Rightarrow \quad \boxed{\alpha \approx 0{,}131}$ (el valor exacto en 2D es $\alpha = 0$).

Con las demás identidades se calculan los demás exponentes.