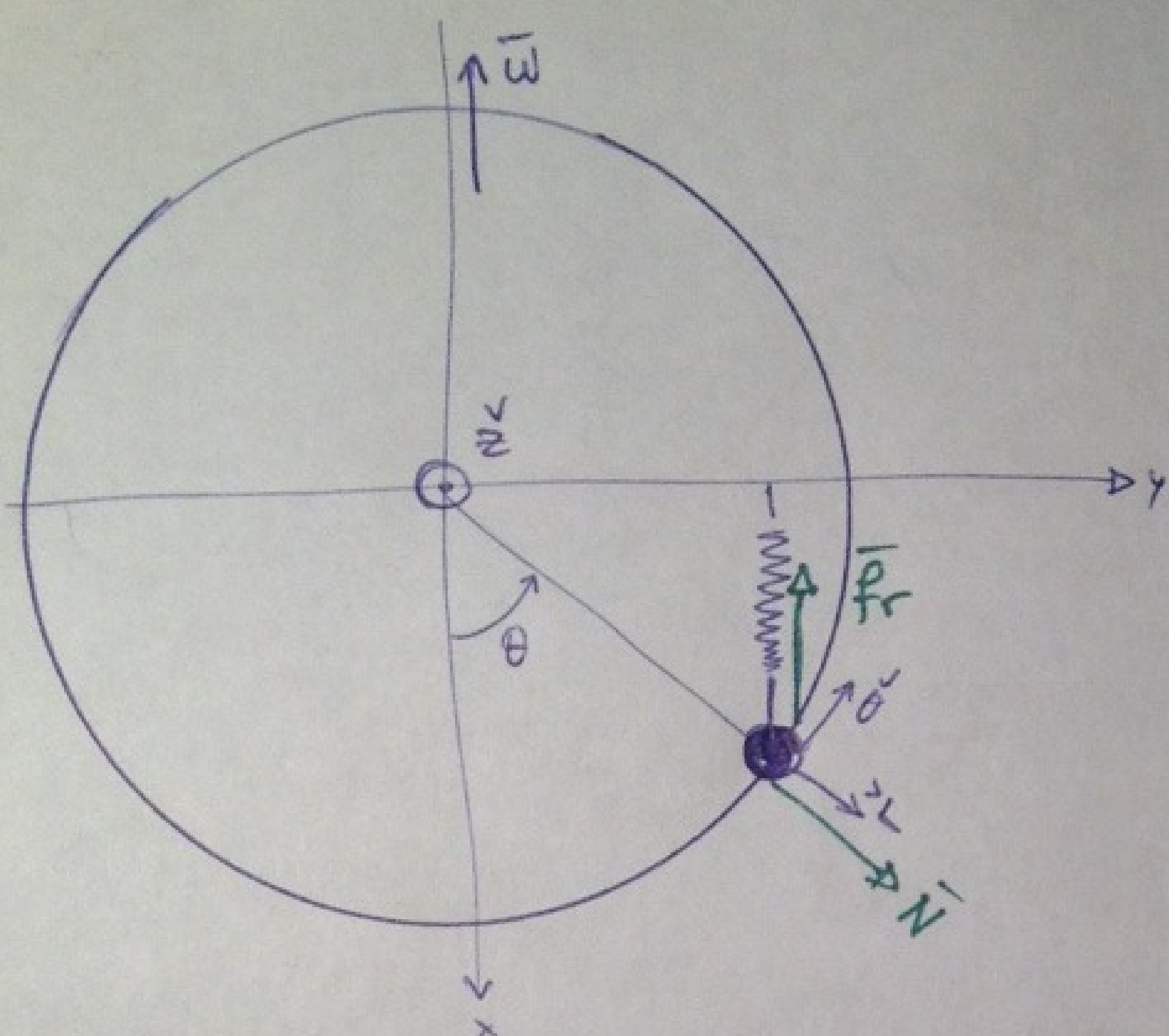
Problema 3



ⓐ Los únicas fuerzas que actúan son $\bar{N}$ y $\bar{f}_r$, la fuerza del resorte, por lo tanto las ecuaciones de Newton en S' se escriben como:

$$m\bar{a}_{S'} = \bar{N} + \bar{f}_r - m\,\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) - 2m\,\bar{\omega}\times\bar{v}_{S'}$$

Entonces escribimos c/u de los 4 contribuciones en un sistema S' y en cilíndricas:

$\bar{N}$:

$$\bar{N} = N_r\,\check{r} + N_z\,\check{z}$$

$\bar{f}_r$:

$$\bar{f}_r = -k(l-l_0)[\cos\theta\,\check{r} - \operatorname{sen}\theta\,\check{\theta}]$$

donde $l_0 = R$
$l = R\cos\theta$, o sea:

$$\bar{f}_r = -kR(\cos\theta - 1)[\cos\theta\,\check{r} - \operatorname{sen}\theta\,\check{\theta}]$$

$-m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$: notar que $\bar{\omega} = -\omega \cos\theta\, \check{r} + \omega \operatorname{sen}\theta\, \check{\theta}$

$$\Rightarrow \bar{\omega}\times\bar{r} = \omega R \operatorname{sen}\theta\,(-\check{z}) \Rightarrow$$

$$-m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) = m\omega^2 R \operatorname{sen}\theta\,(\cos\theta\,\check{\theta} + \operatorname{sen}\theta\,\check{r})$$

$-2m\bar{\omega}\times\bar{v}_{s'}$: $-2m\bar{\omega}\times v_{s'} = -2m\omega(-\cos\theta\,\check{r} + \operatorname{sen}\theta\,\check{\theta})\times(\dot{\theta}R\check{\theta}) =$

$$= 2m\omega\dot{\theta}R\cos\theta\,\check{z}$$

Entonces las ecuaciones de Newton en cilíndricas son:

$$\check{r})\quad -m\dot{\theta}^2 R = N_r - kR(\cos\theta - 1)\cos\theta + m\omega^2 R \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\check{\theta})\quad m\ddot{\theta}R = kR(\cos\theta - 1)\operatorname{sen}\theta + m\omega^2 R \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\check{z})\quad 0 = N_z + 2m\omega\dot{\theta}R\cos\theta$$

(b) La ecuación de movimiento es la asociada a $\check{\theta}$, las otras determinan el valor de la fuerza de vínculo $\bar{N}$, o sea:

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{k}{m}(\cos\theta - 1)\operatorname{sen}\theta + \omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

luego llamando $f(\theta) = \frac{k}{m}(\cos\theta - 1)\,\text{sen}\,\theta + \omega^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

en $\ddot{\theta} = f(\theta)$, los puntos de equilibrio son

tales que $f(\theta_{eq}) = 0 \iff$

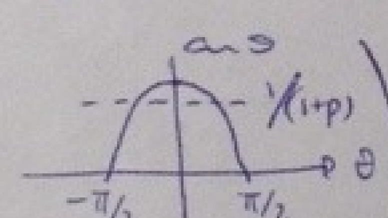
$$0 = \frac{k}{m}\,\text{sen}\,\theta\left[\cos\theta - 1 + \frac{\omega^2 m}{k}\cos\theta\right]$$

; $\theta = 0$ es solución ($\text{sen}\,\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ en $[-\frac{\pi}{2}, \pi/2]$)

si $\theta \neq 0$ $\quad 0 = (1+p)\cos\theta - 1$; $p = \frac{m\omega^2}{k}$

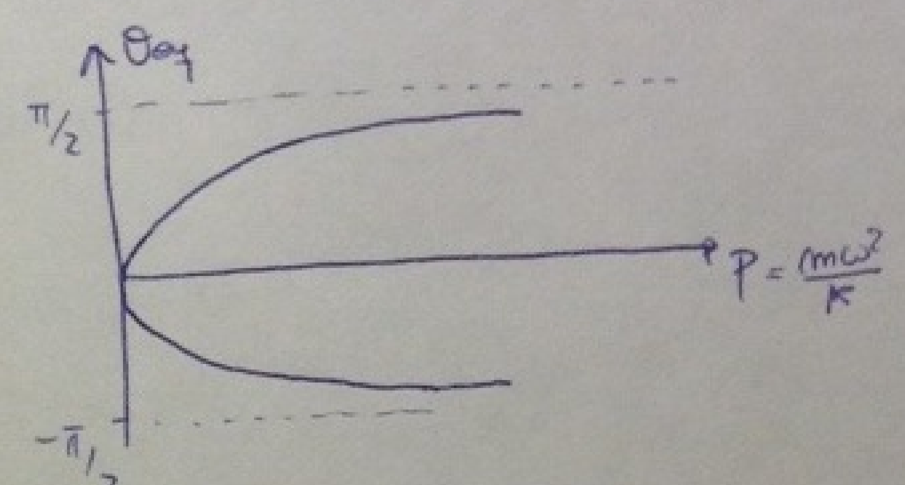
$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{1+p}$ siempre $\exists$ 2 soluciones ya que

$p > 0$ (ver de



) $\Rightarrow$ los puntos de equilibrio

son $\theta = 0$, $\theta = \pm\arccos\left(\frac{1}{1+p}\right)$, que gráficamente:



(c) para obtener la estabilidad evaluamos $f'(\theta_{eq})$

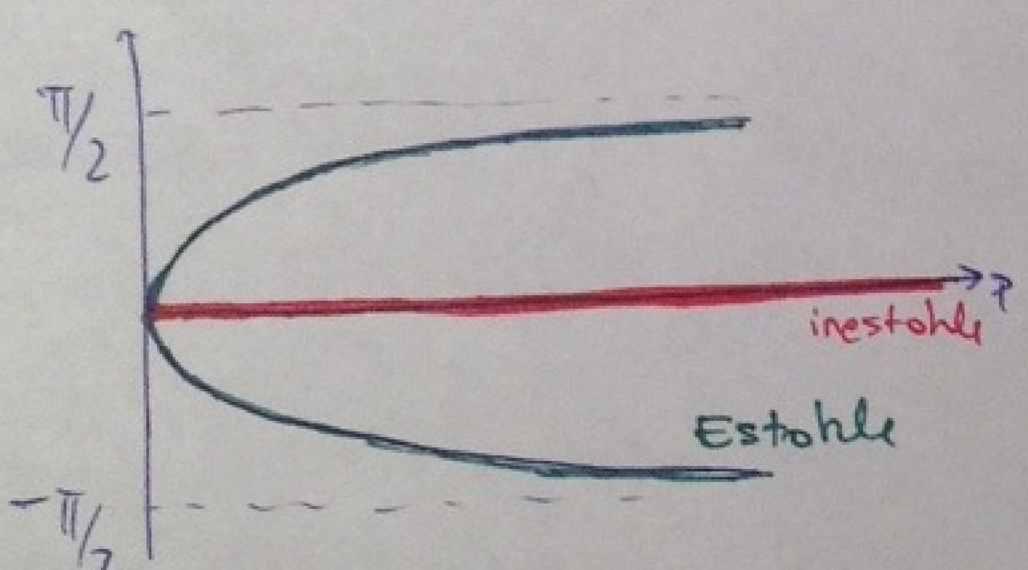
$$f'(\theta) = \frac{k}{m}\cos\theta\left[(1+p)\cos\theta - 1\right] + \frac{k}{m}\operatorname{sen}\theta\left[-\operatorname{sen}\theta\ (1+p)\right]$$

$\Rightarrow \quad f'(0) = \frac{k}{m}\, p > 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{eq} = 0$ es siempre inestable

en cambio si $\theta_{eq} \,/\, \cos\theta_{eq} = \frac{1}{1+p}$

$$f'(\theta_{eq}) = -\frac{k}{m}\operatorname{sen}^2\theta_{eq}\,(1+p) < 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{eq} \,/\, \cos\theta_{eq} = \frac{1}{1+p}$$

es siempre estable, en resumen:



Notar que esto es intuitivamente lo que uno espera, si $p = \frac{m\omega^2}{k} \to \infty$

la fuerza centrífuga expulsa la bolita hacia los extremos. Para cualquier valor finito de ω el origen $\theta = 0$ es inestable ya que allí el resorte tiene su longitud natural y por lo tanto el término centrífugo siempre desestabiliza ese punto.