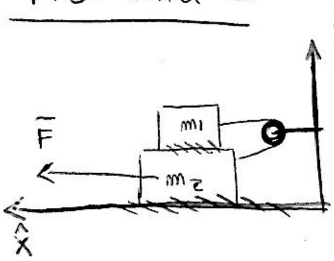
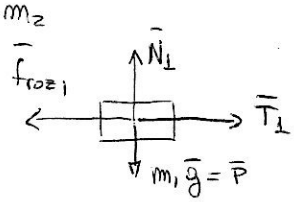
Problema 1

Datos: $\mu_e, \mu_d, g, m_1, m_2$



D.C.A m_1

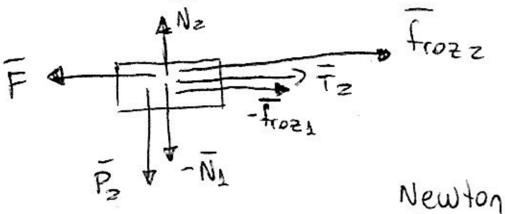


$$\underbrace{\begin{matrix} \bar{N}_1 = N_1\,\hat{y} & \bar{f}_{roz_1} = f_{roz_1}\,\hat{x} \\ \bar{T}_1 = -T_1\,\hat{x} & \bar{P} = -m_1 g\,\hat{y} \end{matrix}}_{\text{Fuerzas}}$$

Newton: $\hat{x})\quad f_{roz_1} - T_1 = m_1\,\ddot{x}_1$

$\hat{y})\quad N_1 - m_1 g = 0$

D.C.A. m_2



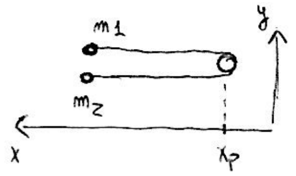
Fuerzas
$$\begin{cases} \bar{N}_2 = N_2\,\hat{y}\ ; \quad \bar{f}_{roz\,2} = -f_{roz\,2}\,\hat{y}\ ; \quad \bar{T}_2 = -T_2\,\hat{x} \\ -\bar{f}_{roz_1} = -f_{roz_1}\,\hat{x}\ ; \quad -\bar{N}_1 = -N_1\,\hat{y}\ ; \quad \bar{P}_2 = -m_2 g\,\hat{y} \\ \bar{F} = F\,\hat{x} \end{cases}$$

Newton $\hat{x})\quad F - f_{roz\,2} - f_{roz_1} - T_2 = m_2\,\ddot{x}_2$

$\hat{y})\quad N_2 - N_1 - m_2 g = 0$

Vínculos

1) soga inextensible de longitud L:



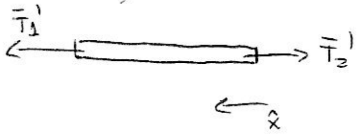
$$\overset{\text{cte}}{L} = (x_1 - \overset{\text{cte}}{x_p}) + (x_2 - \overset{\text{cte}}{x_p})$$

derivo dos veces

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$$

2) soga inextensible y de masa despreciable: Entonces las reacciones de las tensiones $\bar{T}_1$ y $\bar{T}_2$ (que llamamos $\bar{T}_1'$ y $\bar{T}_2'$) cumplen $|\bar{T}_1'| = |\bar{T}_2'| \Rightarrow |T_1| = |T_2|$

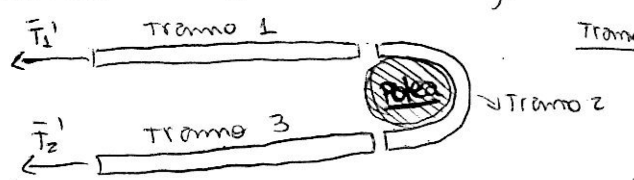
Si la soga está sobre una recta esto es fácil de ver:



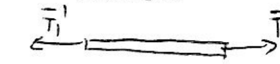
Newton para la soga: $\hat{x})\quad T_1 - T_2 = \underbrace{m_{soga}}_{\approx 0} \cdot a_{x_{soga}} \approx 0$

$$\Rightarrow T_1 = T_2$$

Como la soga está doblada en el problema, es un poco más complicado: Conviene dividir a la soga en tres tramos

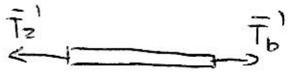


Tramo 1



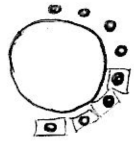
, donde T_a' es una fuerza interna de la soga que mantiene unidos los tramos "1" y "2". En este tramo vale $T_1' = T_a'$

Tramo 3: Igual al tramo 1:

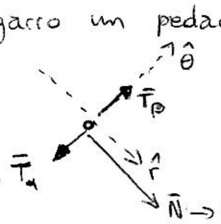


con $T_2' = T_b'$

Tenemos que relacionar a T_1' con T_2'. Para esto, en el tramo 2 usamos coordenadas polares y volvemos a subdividir al tramo 2 en pedacitos más pequeños:



Si agarro un pedacito, tengo



fuerza que le hace el pedacito contiguo

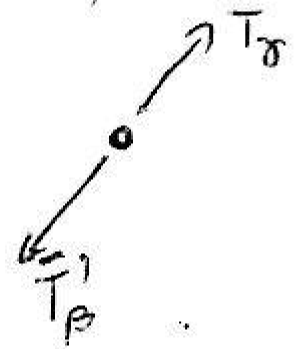
$\bar{N} \rightarrow$ normal que le hace la polea

Newton: $\hat{r})\ \ldots\ldots$

$\hat{\theta})\quad T_\beta - T_\alpha = \underbrace{m}_{\approx 0} R\ddot{\theta} \approx 0$

$\Rightarrow T_\alpha \simeq T_\beta$

Ahora agarro el pedacito justo de al lado



donde $\bar{T}'_\beta = -\bar{T}_\beta$ (por acción–reacción)

Newton $\hat{r})$ ...

$\hat{\theta})$ $T'_\beta \approx T_\gamma \Rightarrow T_\beta \approx T_\gamma$

Haciendo esto para todos los pedacitos se ve que $|\bar{T}'_a| = |\bar{T}'_b|$, por lo que $|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2|$.

Por supuesto, en el parcial alcanzaba con decir que la soga era inextensible y de masa despreciable para justificar $|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| = |T|$

Las ecuaciones quedan

uso vínculo

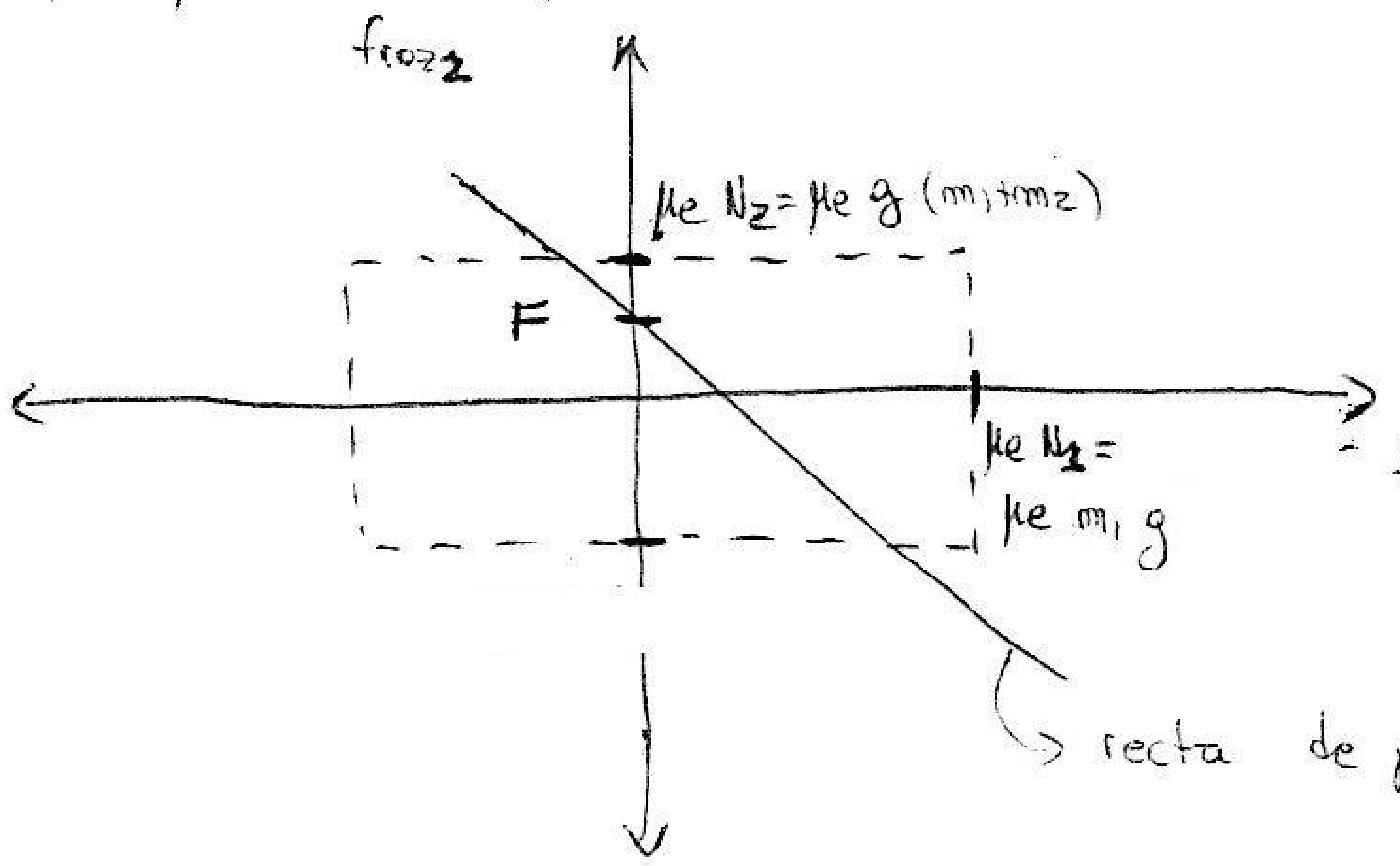
$$\begin{cases} f_{roz\,1} - T = m_1 \ddot{x}_1 & (1) \\ N_1 - m_1 g = 0 & (2) \\ F - f_{roz\,2} - f_{roz\,1} - T = m_2 \ddot{x}_2 = m_2 \ddot{x}_1 & (3) \\ N_2 - N_1 - m_2 g = 0 & (4) \end{cases}$$

b) En el caso de equilibrio estático $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$

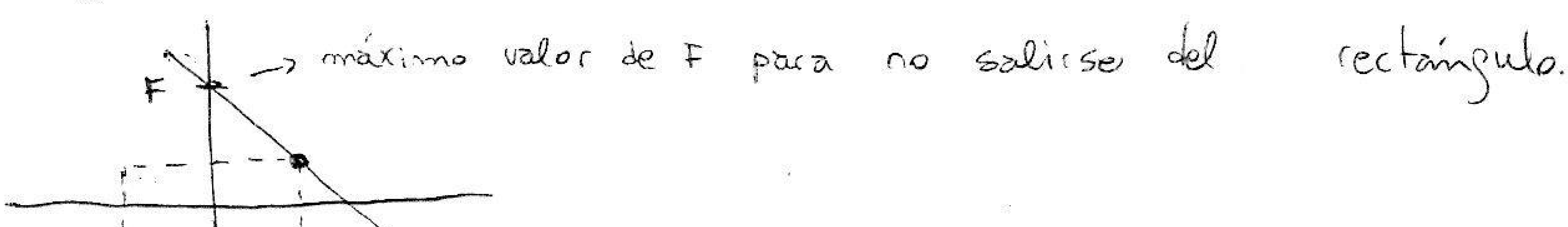
Haciendo $(3) - (1)$ se llega a $F - 2f_{roz\,1} - f_{roz\,2} = 0$ (logramos eliminar la tensión, que es una incógnita del problema)

$\Rightarrow \quad f_{roz\,2} = F - 2\, f_{roz\,1}$ ⊛

En el caso estático la f_{roz} es una incógnita, aunque sabemos que $|f_{roz}| \leq \mu_e |\bar{N}|$. La ec. ⊛ relaciona las dos fuerzas de roz, desconocidas:



Nos preguntan el máximo valor que puede tomar F. A medida que F crezca en el gráfico anterior (la ordenada al origen) la recta "sube" y llegará un punto en el que salga del rectángulo de validez:



En ese punto $f_{roz\,1} = \mu_e\, m_1 g$ y $f_{roz\,2} = \mu_e\, g\, (m_1 + m_2)$

De ⊛ $F = 2 f_{roz\,1} + f_{roz\,2} = \mu_e\, g\, (3 m_1 + m_2)$

Alternativamente, directamente de ⊛

$$F = 2 f_{roz\,1} + f_{roz\,2} \Rightarrow |F| \leq 2 |f_{roz\,1}| + |f_{roz\,2}| = \mu_e\, g\, (3 m_1 + m_2)$$

lo importante de esta desigualdad es que vale la igualdad en el caso extremo.

$$\Rightarrow \boxed{F_{max} = \mu_e\, g\, (3 m_1 + m_2)}$$

c) Si ahora F supera este valor, el sistema se mueve. Ahora $\ddot{x}_1 \neq 0$ y $|f_{roz}| = \mu_d |N|$, las fuerzas de rozamiento son dinámicas, la dirección en que las dibujemos ahora es importante dado que se tienen que oponer al mto. (Como las dibujamos inicialmente es la forma correcta)

Reemplazamos $f_{roz\,1} = \mu_d\, m_1 g$ $\quad f_{roz\,2} = \mu_d |N_2| = \mu_d\, (m_1 + m_2)\, g$

De vuelta (1) −(3): $\quad F - 2 f_{roz\,1} - f_{roz\,2} = -(m_1 + m_2)\, \ddot{x}_1$

$$F - 2\mu_d\, m_1 g - \mu_d\, (m_1 + m_2)\, g = (m_1 + m_2)\, \ddot{x}_1$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = -\frac{F - \mu_d\, g\, (3 m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$$