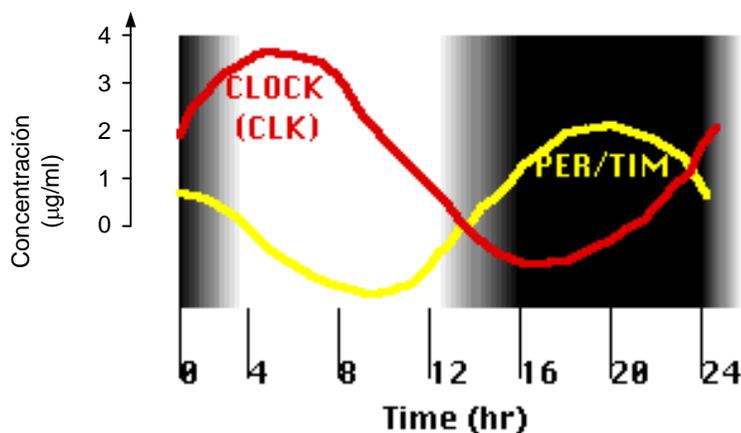


## Guía 4: Movimiento Oscilatorio

### I - Cinemática del movimiento oscilatorio

- 1) El desplazamiento de un objeto está determinado por la ecuación  $y(t) = 3\text{cm} \sin(20\pi/s t)$ . Grafique  $y$  en función del tiempo y señale la amplitud y el periodo de las oscilaciones.
- 2) La coordenada de un objeto viene dada por  $(0.057\text{m}) \cos[(3.9/s)t]$ .
  - a) ¿Cuánto valen la amplitud  $A$ , la frecuencia angular  $\omega$ , la frecuencia  $f$ , el periodo  $T$  y la fase  $\phi$ ?
  - b) Escriba las expresiones para la velocidad  $v$  y la aceleración  $a$  del cuerpo.
  - c) Determine  $y$ ,  $v$  y  $a$  en  $t=0.25$  segundos.
- 3) Un objeto que tiene un movimiento armónico simple tiene su máximo desplazamiento  $0,2 \text{ m}$  en  $t = 0$ . Su frecuencia es de  $8 \text{ Hz}$ .
  - a) Hallar los instantes en que las elongaciones son por primera vez  $0,1 \text{ m}$ ;  $0 \text{ m}$ ;  $-0,1\text{m}$ ;  $-0,2\text{m}$
  - b) Halle las velocidades en dichos instantes.  
Resp.: a)  $0.02\text{s}$ ,  $0.031\text{s}$ ,  $0.042\text{s}$ ,  $0.062\text{s}$  ; b)  $-8.67\text{m/s}$ ,  $-10\text{m/s}$ ,  $-8.67\text{m/s}$ ,  $0\text{m/s}$
- 4) Un objeto describe un movimiento armónico simple con una amplitud  $A = 63 \text{ mm}$  y una frecuencia  $\omega = 4.1 \text{ 1/s}$ . Considere  $t=0$  cuando el objeto pasa por el punto medio del recorrido.
  - a) Escriba las expresiones para  $x$ ,  $v$ ,  $a$ .
  - b) Determine  $x$ ,  $v$  y  $a$  para  $t=1.7$  segundos.
- 5) Un objeto oscila con frecuencia  $10 \text{ Hz}$  y tiene una velocidad máxima de  $3 \text{ m/s}$ . ¿Cuál es la amplitud del movimiento?
- 6) En biología encontramos fenómenos oscilatorios por todos lados (ritmos circadianos, actividad cardiaca, crecimiento estacional, actividad neuronal rítmica, etc, etc). En gran parte de los casos, la variable que sigue un comportamiento oscilatorio no es la posición de un objeto sino de algún otro tipo concentración de proteínas, flujo, tamaño, voltaje, etc). Asimismo, difícilmente las variables sigan funciones inusoidales puras. El siguiente gráfico muestra la fluctuación en las concentraciones de las proteínas PER/TIM y CLOCK en el transcurso de un día en células de la mosca *Drosophila melanogaster*. Estas proteínas controlan el ritmo circadiano de la mosca. Hay una tercera oscilación en la figura: la luminosidad (en tonos de gris). ¿Cuál es el período de cada oscilación? ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones de concentración? ¿Cuál es la diferencia de fase entre las dos curvas? Expresé las diferencias en horas, en radianes y en grados, considerando que el período corresponde a  $2\pi$ .



## II - Dinámica del movimiento oscilatorio

- 7) Un cuerpo está apoyado sobre una mesa, unido a un resorte de constante  $k=500 \text{ N/m}$  y largo natural  $10 \text{ cm}$  (el otro extremo del resorte está fijo a la pared). Si el cuerpo se desplaza una distancia  $2 \text{ cm}$  de su posición de equilibrio, comprimiendo al resorte, y se lo suelta, oscila con un período de  $0,63 \text{ s}$ .
- Haga el diagrama de cuerpo libre y halle la ecuación del movimiento a partir de la 2ª Ley de Newton.
  - Determine el valor de la masa en función de los datos.
  - Escriba las ecuaciones de la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

Resp. b)  $5 \text{ kg}$     c)  $x = -2 \text{ cm} \cos(10t/\text{s}) + 10 \text{ cm}$ ;  
 $v = 20 \text{ cm/s} \sin(10t/\text{s})$ ;  $a = 200 \text{ cm/s}^2 \cos(10t/\text{s})$

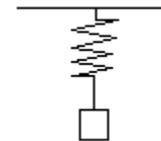
- 8) La frecuencia con la que oscila un cuerpo unido al extremo de un resorte es  $5 \text{ Hz}$  ¿Cuál es la aceleración del cuerpo cuando el desplazamiento es  $15 \text{ cm}$ ?

Resp:  $148 \text{ m/s}^2$

- 9) Para estirar  $5 \text{ cm}$  un resorte horizontal es necesario aplicarle una fuerza de  $40 \text{ N}$ . Uno de los extremos de este resorte está fijo a una pared mientras que en el otro hay un cuerpo de  $2 \text{ kg}$ . La masa del resorte es despreciable. Si se estira el resorte  $10 \text{ cm}$  a partir de su posición de equilibrio y se lo suelta:
- ¿Cuál es la amplitud y la frecuencia del movimiento? ¿Cuánto tiempo tarda en hacer una oscilación completa?
  - Obtenga la expresión de posición en función del tiempo y grafíquela señalando la posición de equilibrio.
  - Calcule la posición, la velocidad y la aceleración al cabo de  $0,2 \text{ seg}$ . Describa cualitativamente en que etapa del movimiento oscilatorio está.

Resp: a)  $A = 10 \text{ cm}$ ;  $f = 3.18 \text{ Hz}$ ;  $T = 0.314 \text{ seg}$ .  
 b) con  $x_{\text{eq}} = 0$ ;  $x(t) = 10 \text{ cm} \cos(20 t/\text{seg})$   
 c) en  $t = 0.2 \text{ s}$ ;  $x = -6.54 \text{ cm}$ ;  $v = -1.5 \text{ m/s}$ ;  $a = 26.1 \text{ m/s}^2$

- 10) Un cuerpo de masa  $800 \text{ g}$  está suspendido de un resorte de longitud natural  $15 \text{ cm}$  y constante elástica  $K = 320 \text{ N/m}$ , que se encuentra colgado del techo.



- Halle la posición de equilibrio.
- Si se desplaza al cuerpo  $1,5 \text{ cm}$  hacia abajo a partir de la posición de equilibrio y se lo suelta, halle su posición en función del tiempo.

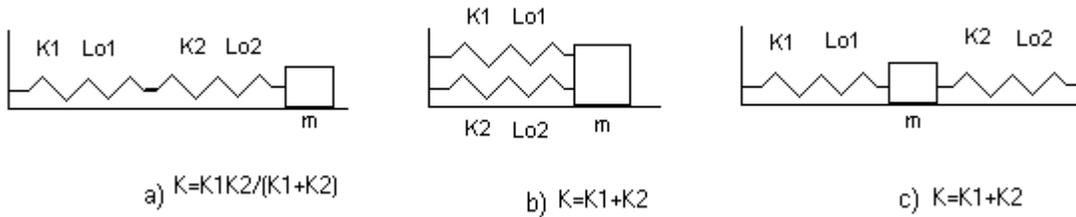
Resp: a)  $17,5 \text{ cm}$  del techo

- 11) Usando los órganos sensoriales de sus patas, las arañas detectan las vibraciones de sus telas cuando una presa queda atrapada.

- Si al quedar atrapado un insecto de  $1 \text{ gr}$  la tela vibra a  $15 \text{ Hz}$ , ¿cuál es la constante elástica de la tela?
- ¿Cuál sería la frecuencia cuando queda capturado un insecto de  $4 \text{ gr}$ ?

Resp: a)  $8,9 \text{ N/m}$     b)  $7,5 \text{ Hz}$

- 12) Un cuerpo de masa  $m$  está unido a resortes de constante  $k_1$  y  $k_2$  como se indica en cada uno de los siguientes casos. Demuestre que las mismas situaciones se pueden representar por un único resorte de cte. elástica  $K$  tal que



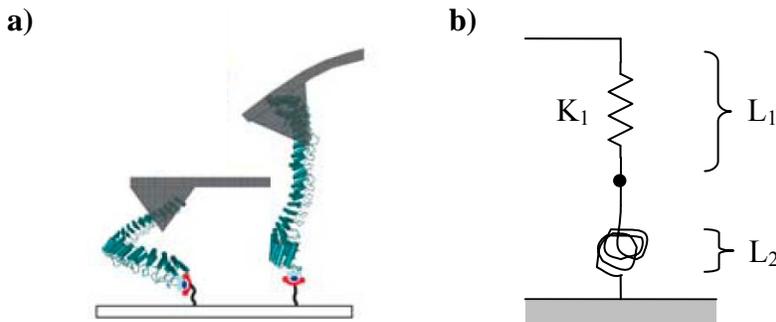
Se puede ver que para N resortes iguales de constante elástica K, su equivalente es  $K_{eq}=K/N$  si se colocan en serie, y  $K_{eq}=K.N$  si se colocan en paralelo

13) Demuestre que el período de oscilación de un péndulo es  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$  (pequeñas oscilaciones), donde L es el largo del péndulo, y es independiente de la masa.

14) La aceleración de la gravedad varía ligeramente sobre la superficie de la tierra. Si un péndulo tiene un período de  $T = 3,00$  segundos en un lugar en donde  $g = 9,803 \text{ m/s}^2$  y un período de  $T = 3.0024$  segundos en otro lugar. ¿Cuál es el valor de g este último lugar?

Resp:  $9,787 \text{ m/s}^2$

15) En la *Microscopía de Fuerza Atómica*, una punta de prueba se utiliza para explorar superficies con resolución nanométrica. En una de las aplicaciones de esta técnica, a la superficie se unen previamente copias de alguna biomolécula de la cual se quiera investigar el detalle de sus propiedades físicas como ser resistencia a la tensión, elasticidad y estructura. Se busca en cada experimento pegar con la punta de prueba un extremo de una biomolécula única (el otro permanece adherido a la superficie). Al retraer la punta hacia arriba, la biomolécula comienza a estirarse y ejerce una fuerza hacia abajo sobre la punta (Fig 1a). La punta de prueba se comporta como un resorte del cual el experimentador conoce la constante elástica ( $K_1$ ) y puede medir en cada instante su elongación ( $L_1$ ) y la de la biomolécula ( $L_2$ ) (Fig 1b).



**Figura 1. a)** La caricatura muestra cuando la punta de prueba toca una molécula de proteína (izq) y la estira (der). La punta se deforma elásticamente por la fuerza realizada por la molécula al estirarse. **b)** En el modelo, el resorte representa a la punta de prueba y el ovillo a la biomolécula de interés.  $L_1$  y  $L_2$  son nulos cuando la punta de prueba o la proteína, respectivamente, tienen su longitud natural.

- 1) ¿Cómo se calcula con este sistema la fuerza que ejerce la biomolécula en función de su estiramiento?
- 2) En un trabajo publicado en la revista Nature en marzo de 2006, el grupo de Piotr Marszalek de la Universidad de Duke estudia las propiedades elásticas de una proteína con dominios estructurales de ankirina. Los investigadores descubrieron que la proteína misma se comporta en ciertas condiciones como un resorte de dimensiones nanométricas. La figura 2 muestra mediciones de microscopía de fuerza atómica obtenidas para tres proteínas distintas. Se grafica la fuerza que ejerce la proteína en función de su estiramiento.

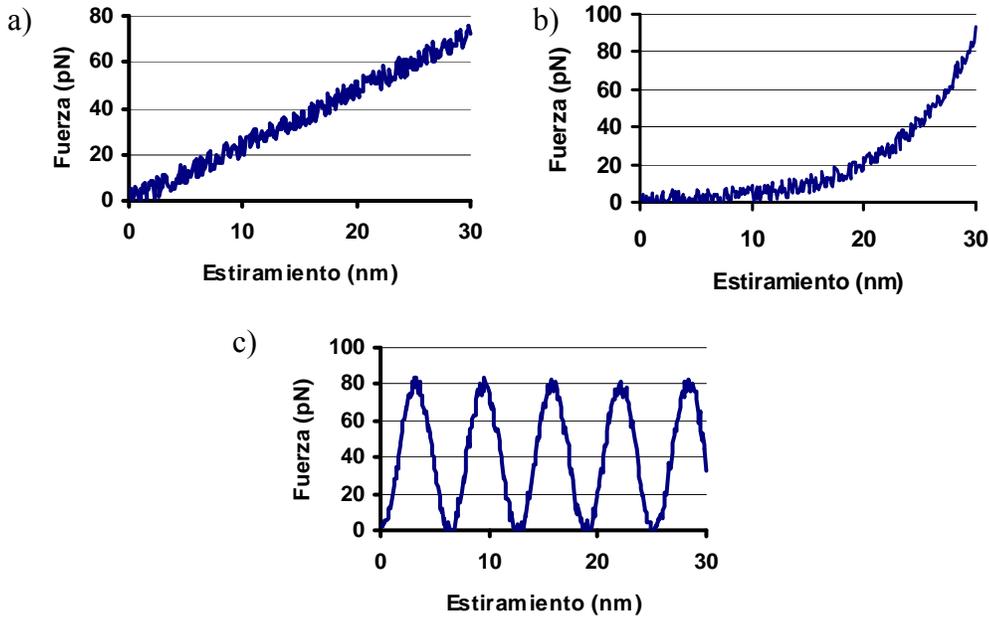
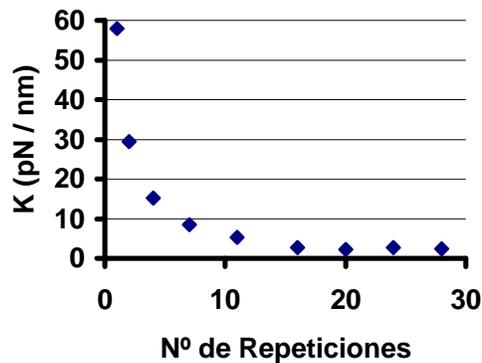


Figura 2.

¿Cuál de estos gráficos se correspondería con la proteína estudiada por Marszalek? Justifique. Averigüe aproximadamente su constante elástica.

- 3) Si se construye una serie de proteínas con distinto número de repeticiones de ankirina y se mide su constante elástica se obtiene un gráfico como el de la figura 3.



- a) ¿Cómo interpreta este resultado? (Pista: repase el problema 12).  
 b) ¿Más o menos cuántas repeticiones de ankirina tiene la proteína estudiada por Piotr?

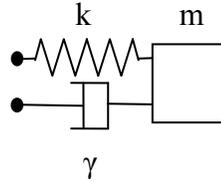
### III - Movimiento oscilatorio amortiguado

Un oscilador amortiguado se describe mediante la ecuación diferencial (Ec. De Newton)

$$m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{\gamma}{m}\dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{\gamma}{m}\dot{x} = 0$$



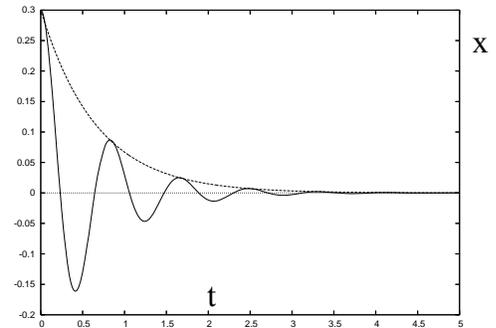
Aquí los dos efectos (restitución y disipación) compiten. Las formas de las soluciones en este caso dependen de ciertas relaciones entre los parámetros  $m$ ,  $k$ , y  $\gamma$ . El resultado de las combinaciones de parámetros resulta en dos tipos de movimiento, caracterizados por *oscilaciones subamortiguadas*, o *decaimientos sobreamortiguados*. En todos los casos, la disipación hará decaer asintóticamente la solución a un equilibrio, alrededor del cual el sistema puede oscilar o decaer sin oscilaciones.

- En el rango  $\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 < \omega_0^2$  (1) domina el término inercial (de masa) y las soluciones presentan **oscilaciones amortiguadas** (también llamadas **oscilaciones subamortiguadas**).

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega_{am}t + \phi)$$

$$v(t) = -Ae^{-\lambda t} [\lambda \cos(\omega_{am}t + \phi) + \omega_{am} \sin(\omega_{am}t + \phi)]$$

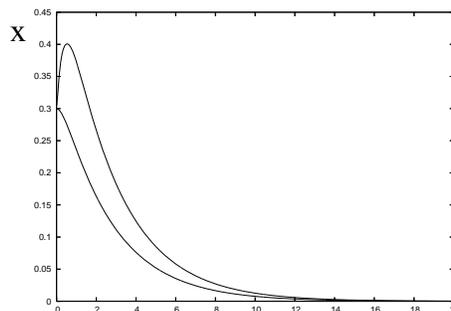
$$\begin{cases} \lambda = \frac{\gamma}{2m} \\ \omega_{am}^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 \end{cases}$$



- Por otra parte, en el rango  $\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 > \omega_0^2$  (2) domina el término disipativo y las soluciones no oscilan, sino que decaen al origen. Se trata de un movimiento **sobreamortiguado** cuya solución general se escribe como

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{\gamma}{2m} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \\ \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2m} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$



Un tiempo característico de la oscilación es  $\tau = \lambda^{-1}$ . Es el tiempo en que la amplitud  $t$  cayó a un 36.8% de su valor inicial ( $e^{-1}=0.368$ ). Otro valor que caracteriza las oscilaciones amortiguadas es su coeficiente

$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$ . Para sistemas oscilantes poco amortiguados  $Q$  toma valores altos (por ejemplo para un auto con amortiguadores en buen estado  $Q \sim 1$ , mientras que para una cuerda de guitarra es varios miles).

16) Se tiene una esferita de platino de 2.9cm de diámetro unida a un resorte de constante  $k=0.1\text{N/m}$ . Se comprueba que cuando está sumergida en aceite oscila de manera que su posición en función del tiempo es  $x(t) = 5\text{cm} e^{-0.02t/s} \cos(0.6t/s)$ .

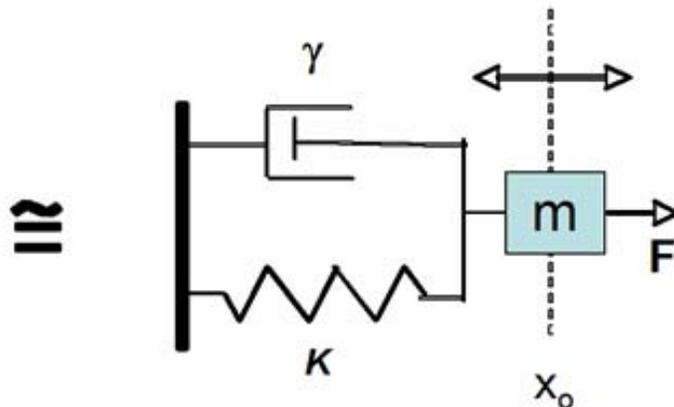
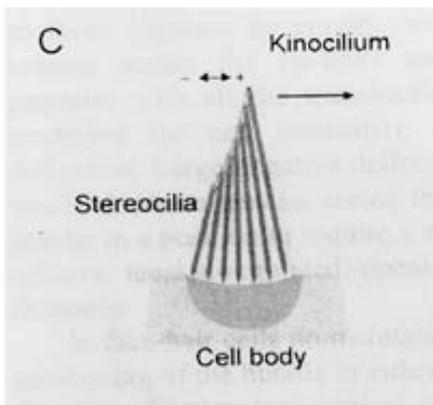
a) Grafique la posición en función del tiempo. Calcule el valor de  $\tau$  y el período de la oscilación.

b) Calcule la masa de la esferita.

c) En las condiciones del problema, la constante de amortiguamiento verifica la ley de Stokes,  $\gamma = 6\pi R\eta$ , donde  $R$  es el radio de la esfera y  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad del medio. Calcule el valor de  $\gamma$  y  $\eta$ .

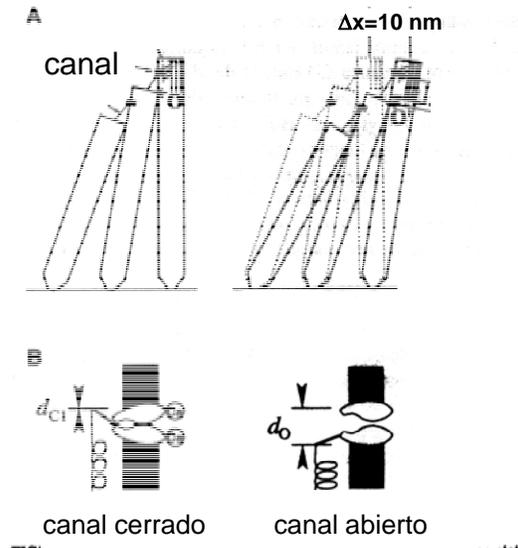
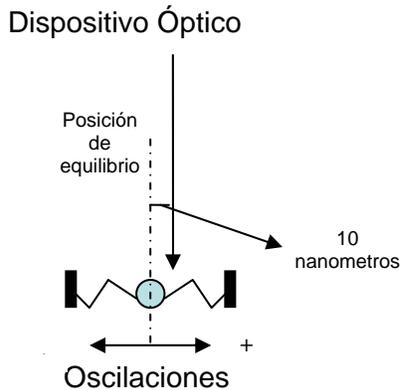
Resp. a)  $\tau=50\text{s}$ ,  $T=10.5\text{s}$ ; b)  $m=277\text{g}$ ; c)  $\gamma=0.011\text{kg/s}$ ,  $\eta=0.04\text{kg/sm}$

17) Las células sensoriales del oído (**Hair cells**) median la percepción del sonido, la aceleración lineal, angular y la gravedad (sistemas de equilibrio) en vertebrados. Estas células no son mas (ni menos) que resonadores muy bien afinados a las frecuencias de las señales mecánicas que deben detectar, y su posibilidad de reportar al sistema nervioso fielmente estas señales depende críticamente de su capacidad de transformar un input mecánico en una señal eléctrica (una corriente, que es la moneda del SN) que transporte la información sobre la señal externa al cerebro. O sea que estas células deben funcionar como “transformadores” de una señal mecánica en una señal eléctrica. Para poder hacerlo cuentan con una estructura (estereocilias) que es capaz de oscilar en respuesta a una señal mecánica. Como estas estructuras elásticas oscilan en un medio viscoso, podemos modelarlas como una masa  $M$  acoplada a un oscilador de constante  $K$  moviéndose en un medio viscoso con disipación lineal  $\gamma$ . O sea, estas células no son más que osciladores amortiguados.



Construyendo un Detector de movimiento:

Suponga que las estereocilias oscilan en torno a una posición de equilibrio en respuesta a una señal sonora. Cada vez que en la estructura se produce un desplazamiento igual o mayor a 10 nanómetros (solo en el sentido positivo), como consecuencia se abre un canal que deja entrar corriente a la célula. Se quiere medir la corriente que entra indirectamente con un dispositivo óptico que cuenta la cantidad de veces que el sistema se desplaza al menos 10 nanómetros, según el siguiente diagrama:



Determine para las siguientes condiciones:  $K = 1 \text{ mN/m}$  ( $1 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ ), masa  $M = 10^{-13} \text{ kg}$  en un medio con  $\gamma = 0.001 \text{ } \mu\text{N.s/m}$  ( $1 \cdot 10^{-9} \text{ N.s/m}$ )

- cuál es la frecuencia (**f**) de la oscilación?
- el movimiento será sub o sobre amortiguado? Cual es su  $\tau$  ?
- Si el desplazamiento tiene una amplitud inicial de 50 nm ( $X_0 = 50 \text{ nm}$ ,  $v_0 = 0$ ) cuántas veces la estereocilia cruza el detector? Cuántas veces se habrá abierto el canal?

Respuestas:

- $f = 15.9 \text{ KHz}$  ( $T = 62.8 \text{ } \mu\text{seg}$  y  $\omega_{\text{am}} = 9.98 \cdot 10^5 \text{ 1/s}$ )
- $\gamma^2 = 1 \cdot 10^{-18} \text{ kg}^2/\text{s}^2$  y  $4mk = 4 \cdot 10^{-16} \text{ kg}^2/\text{s}^2$  el movimiento es sub amortiguado ( $4mk > \gamma^2$ );  $\tau = 200 \text{ } \mu\text{seg}$
- el canal se abre cinco veces (el detector marca 10 tics, 2 tics por ciclo).