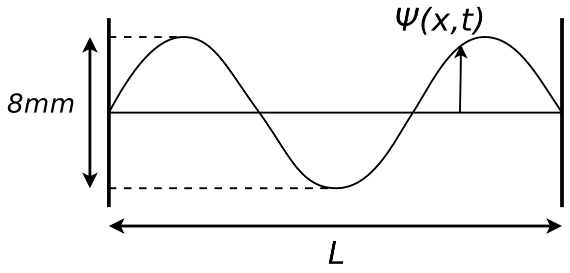
Propagación de ondas en medios continuos

1. Verifique si las siguientes expresiones matemáticas cumplen la ecuación de las ondas unidimensional. Grafique las funciones dadas.
   - $\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda(x-vt)^2}$
   - $\Psi(x,t) = \beta(x+vt)$
   - $\Psi(x,t) = A\sin[k(x-vt)]$
   - $\Psi(x,t) = B\sin^2(kx-\omega t)$
   - $\Psi(x,t) = C\cos(kx)\sin(\omega t)$
   - $\Psi(x,t) = De^{i(kx-\omega t)}$

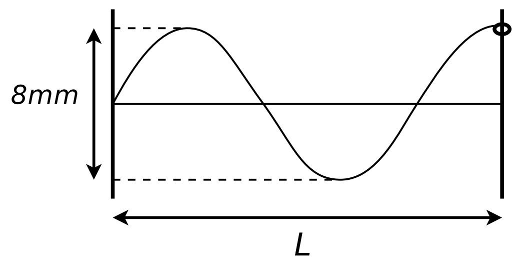
Onda estacionaria en cuerda como superposición de viajeras

2. Se tiene una cuerda de longitud $L = 0,6\,\mathrm{m}$, fija en sus dos extremos, que se encuentra oscilando en uno de sus modos normales como se muestra en la figura. La velocidad de propagación de las ondas en dicha cuerda es $v = 80\mathrm{m/s}$.



   a) Escribir $\Psi(x,t)$ (la elongación en un punto de la cuerda), sabiendo que a $t = 0$ la elongación de todos los puntos es nula; que la amplitud total máxima de la onda es de 8mm, y que $\dot{\Psi}(L/2,0) > 0$
   b) Hallar $\Psi_1(x-vt)$ y $\Psi_2(x+vt)$ tales que $\Psi(x,t) = \Psi_1(x-vt) + \Psi_2(x+vt)$, es decir: escribir a $\Psi(x,t)$ como la superposición de dos ondas viajeras.

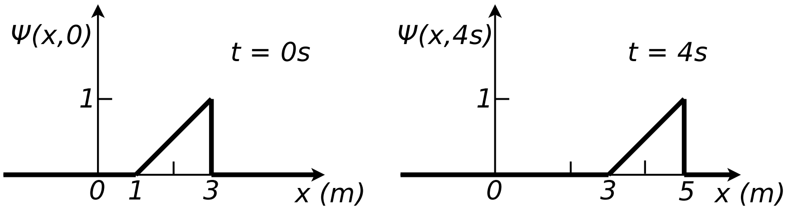
3. Se tiene una cuerda de longitud $L = 1\mathrm{m}$, con un extremo fijo y uno libre, oscilando en el modo normal que se muestra en la figura. La velocidad de propagación de las ondas en dicha cuerda es $v = 80\mathrm{m/s}$, y el desplazamiento de las partículas a $t = 0$ es el máximo posible para este modo, siendo $\Psi(L,0) > 0$. La amplitud total máxima es de $8\,\mathrm{mm}$.



   a) Resolver, para esta situación, todo lo pedido en el problema anterior.
   b) Si ahora la cuerda está oscilando en un modo normal arbitrario n, con las mismas condiciones iniciales dadas arriba, repetir (a) (expresar en función de n).

Propagación en medios no dispersivos

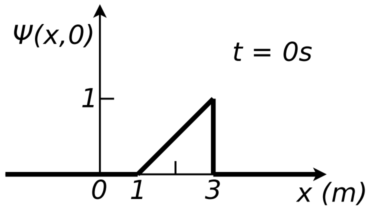
4. Se tiene una perturbación que se propaga en una cuerda infinita con velocidad v. Se toman dos "fotografías" de la perturbación, a $t = 0$ s y $t = 4$ s:



a) Hallar v.

b) Hallar $\Psi(x,t)$.

5. Se tiene una cuerda infinita. Se sabe que la velocidad de propagación de las ondas en ella es $v = 100$ m/s (consideramos que dicha cuerda es un medio no dispersivo). A $t = 0$ se la deforma de la manera que se indica en la figura, y se la suelta (desde el reposo).



a) Hallar $\Psi(x,t) = \Psi_1(x - vt) + \Psi_2(x + vt)$. Dar explícitamente (en cada intervalo de interés) la expresión de $\Psi(x,t)$.

b) Comparar esta situación con la del problema anterior.

6. Se tiene una cuerda homogénea de longitud L y densidad μ, a una tensión T, con sus dos extremos fijos ($x = 0$ y $x = L$). A $t = 0$ se la perturba de forma tal que

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < a \\ h\frac{x-a}{L/2-a} & \text{si } a < x < L/2 \\ h\frac{L-a-x}{L/2-a} & \text{si } L/2 < x < L-a \\ 0 & \text{si } L-a < x < L. \end{cases}$$

Se suelta la cuerda desde el reposo; considerar $h \ll L$.

a) Hallar $\Psi(x,t)$ y demostrar que siempre es posible escribir esta solución como una superposición de una onda que se propaga hacia la derecha y una que se propaga hacia la izquierda.

b) Hacer un esquema cualitativo del movimiento de la cuerda para los instantes $t_n = n\frac{L}{8v}$, donde v es la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda y n es un número natural.

Ecuación de onda

7. La ecuación de una onda transversal en una cuerda está dada por: $y(x,t) = 0,1\,\mathrm{m}\sin\left[\pi\left(x\,\mathrm{m}^{-1} - 4\mathrm{t}\,\mathrm{s}^{-1}\right)\right]$ (x e y en metros y t en segundos). Determine:

a) La amplitud de la onda.

b) La frecuencia de vibración de la cuerda.

c) La velocidad de propagación de la onda.

d) En $t = 1$ s, evaluar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de un segmento pequeño de cuerda ubicado en $x = 2$ m.

8. Sea una onda transversal plana y armónica, cuya frecuencia angular vale $\omega = 10$ s^{-1} y cuyo número de onda es $k = 100$ m^{-1}. En $x_1 = 1$ km y $t_1 = 1$ s la fase de la onda es $\nu(1\,\mathrm{km}, 1\,\mathrm{s}) = 3\pi/2$.

a) ¿Cuánto vale la fase en x_1 para $t = 0$ s?

b) Considerando que $\nu(x,t) = kx - \omega t + \nu_0$, ¿cuánto vale ν_0?

c) ¿A qué velocidad se propaga la onda?

d) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el frente de onda que se hallaba en x_1 llegue a $x = 2x_1$?

9. Una cuerda larga con $\mu = 0{,}005$ kg/m se tensa aplicando una fuerza de 0,25 N. El extremo izquierdo se mueve hacia arriba y hacia abajo con movimiento armónico simple de período 0,5 s y amplitud 0,2 m; se supone que la tensión permanece constante en todo el movimiento. Encontrar:

   a) La velocidad de la onda generada en la cuerda, la frecuencia y la longitud de onda.

   b) La expresión matemática para el desplazamiento: $y(x,t)$.

   c) La energía cinética media por unidad de longitud, de una partícula del medio.

   d) La energía potencial media por unidad de longitud, de una partícula.

Reflexión y transmisión de ondas

10. Se tienen dos cuerdas semi–infinitas, de densidades lineales ρ_1 y ρ_2, unidas en un punto. El sistema está sometido a una tensión T. Sobre la primera cuerda (la de densidad ρ_1) incide una onda de la forma: $\phi_i(x,t) = A_i \cos(k_1 x - \omega t)$. Se conocen: ρ_1, ρ_2, T, ω y A_i.

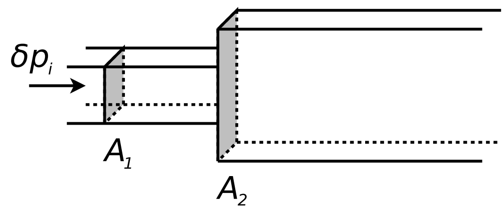
    a) Calcule k_1 y k_2, es decir, los números de onda de cada lado de la unión.

    b) Plantee la solución más general para $\phi(x,t)$ de cada lado de la unión.

    c) ¿Qué condiciones deben verificarse en el punto de unión de las cuerdas?

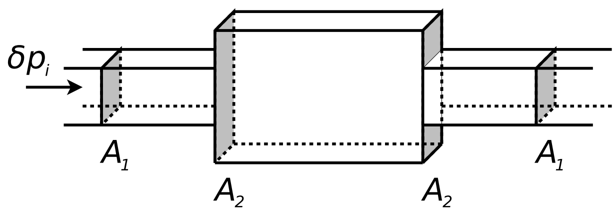
    d) Usando (b) y (c), calcule la perturbación $\phi(x,t)$ en cada una de las cuerdas.

11. Se tienen dos caños semi-infinitos de distinta sección y unidos, como se muestra en la figura. Una onda acústica de la forma $\delta p_i(x,t) = A_i \cos(k_1 x - \omega t)$ incide desde el primer caño hacia $x > 0$. Hallar las amplitudes de presión y elongación de las ondas reflejadas y transmitidas.



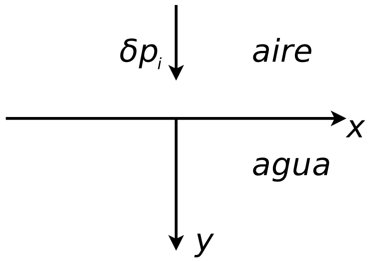
Datos: A_1, A_2, presión media P_0, densidad media ρ_0, v_s, ω, A_i. Suponer despreciables los efectos de la viscosidad.

12. Considere la siguiente configuración:



Suponga que desde la izquierda incide una onda cuya expresión es la misma del problema anterior (las secciones y el resto de los datos son los mismos también). Hallar $\delta p(x,t)$ y $\Psi(x,t)$ en cada tramo.

13. Se tiene una interfase plana e infinita entre aire y agua (ver figura).

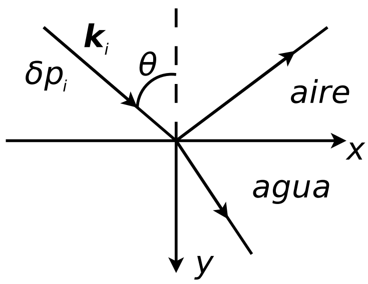


Desde el aire incide una onda acústica plana cuya dirección de propagación es normal a la interfase; se escribe $\delta p_i(y,t) = A_i \cos(k_1 y - \omega t)$. Hallar las ondas reflejadas y transmitidas $\delta p_r(y,t)$ y $\delta p_t(y,t)$.

14. *a*) Demuestre que la función: $\Psi(\mathbf{r},t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\pm\omega t)}$, con $\mathbf{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$ un vector constante y $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, es solución de la ecuación de ondas tridimensional. Sugerencia: exprese el laplaciano en coordenadas cartesianas.

    b) Analice el significado físico de $\Psi(\mathbf{r},t)$. ¿Cómo son los frentes de onda? ¿Cuál es la relación entre el vector $\mathbf{k}$ y los frentes de onda? ¿Hacia dónde se desplazan los frentes de onda al transcurrir t? ¿A qué velocidad?

    c) Rehaga el problema anterior suponiendo que la onda incidente (desde el aire) forma un ángulo θ con la normal a la interfase (ver figura).



Por lo tanto la onda de presión incidente se escribe, si usamos notación compleja: $\delta p_i(\mathbf{r},t) = A_i e^{i(\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$, siendo $\mathbf{k}_i = \frac{\omega}{v_s}(\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y})$. Hallar las ondas reflejadas y transmitidas, $\delta p_r(\mathbf{r},t) = A_r e^{i(\mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ y $\delta p_t(\mathbf{r},t) = A_t e^{i(\mathbf{k}_t\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$.

Velocidad de fase y velocidad de grupo

15. En lo que sigue, encuentre con cuál de estos métodos se determina la velocidad de fase y con cuál la de grupo.

    a) Medir la velocidad del sonido en el aire, golpeando las manos y determinando el tiempo que transcurre entre el aplauso y el eco de un reflector ubicado a una distancia conocida.

    b) Medir la longitud de un tubo que resuena a una frecuencia conocida (y corregir por efectos de borde).

    c) Determinar la velocidad de la luz midiendo el tiempo que tarda un haz colimado en recorrer una distancia conocida.

    d) Encontrar la longitud de una cavidad resonante que oscila en un modo conocido a una frecuencia conocida.

16. Demuestre que la velocidad de grupo v_g y la velocidad de fase v_f están relacionadas por:

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}$$

¿Cómo es $\frac{dv_f}{d\lambda}$ en un medio no dispersivo? En ese caso, ¿cómo se relacionan la velocidad de grupo y la de fase?

Trasformada de Fourier

17. Si $\Psi(\omega)$ corresponde a un espectro de frecuencias cuadrado, o sea $\Psi(\omega) = 1/\Delta\omega$ para ω comprendida en el intervalo de ancho $\Delta\omega$ alrededor de ω_0, y cero en otra parte; vea que $\phi(t)$ está dada por:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sin(t\Delta\omega/2)}{t\Delta\omega/2} \right] e^{i\omega_0 t}$$

   a) Grafique $\Psi(\omega)$ y $|\phi(t)|$.

   b) Sea T un tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear. Muestre que si $\Delta\omega$ es suficientemente pequeño como para que $\Delta\omega T \ll 1$, entonces durante un tiempo menor que T, $\phi(t)$ es una función armónica de amplitud y fase casi constante.

18. Se quiere investigar la relación entre el ancho de un paquete y el desfasaje de las frecuencias que lo componen.

   a) Tome el siguiente pulso con un espectro gaussiano de ancho Δk centrado en k_0 (note que las frecuencias están en fase):

$$F(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2} \right].$$

   Calcule $f(x)$ y vea que tiene una envolvente gaussiana que modula una portadora de frecuencia k_0. Note que el pulso está centrado en $x = 0$ y que se cumple la relación $\Delta x \Delta k = 1/2$ (el paquete gaussiano es el de mínima incerteza).

   b) Ahora desfase las distintas frecuencias en forma lineal, tal que:

$$F(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2} \right] \exp\left[i\alpha(k-k_0) \right].$$

   Calcule $f(x)$ y vea que es el mismo pulso que en la parte (a), pero desplazado en α hacia la derecha (una fase lineal sólo corre la función).

   c) Ahora agregue una fase cuadrática, es decir:

$$F(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2} \right] \exp\left[i\beta(k-k_0)^2 \right].$$

   Calcule $f(x)$ y vea que es un pulso gaussiano centrado en $x = 0$ pero con un ancho Δx que cumple:

$$\Delta x \Delta k = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 16\beta^2 \Delta k^4}.$$

   ¿Es cierto que si se quiere disminuir el ancho de un paquete siempre se debe aumentar Δk? Derive Δx con respecto a Δk de la expresión anterior y analice lo pedido.

Ayuda: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+a)^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$

19. Sea $\phi(t)$ una función real.

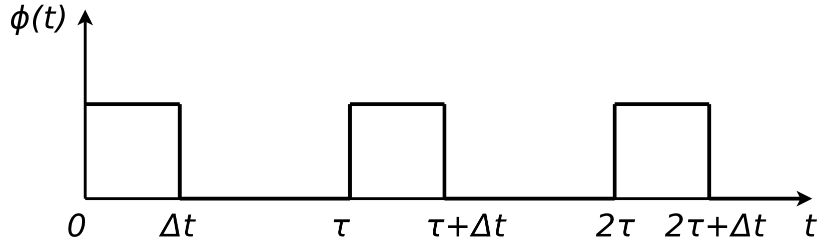
   a) Muestre que su transformada de Fourier $\Psi(\omega)$ cumple $\Psi(\omega) = \Psi^*(-\omega)$ ($\Psi(\omega) = |\Psi(-\omega)|$). Use esto para escribir a $\phi(t)$ como superposición de senos y cosenos.

   b) Muestre que la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ es lineal, esto quiere decir que

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$$

   donde f y g son funciones de x y a y b son constantes.

c) Tomemos una pulsación que se repite N veces:



Vea que la transformada de Fourier de un único pulso situado entre $(n\tau, n\tau + \Delta t)$ es igual a la transformada del pulso $(0, \Delta t)$ multiplicado por la fase $e^{in\phi}$. Calcule entonces la transformada de la pulsación cuadrada que se repite en un tiempo largo $T_{largo} = N\tau$.

d) Muestre que para un valor finito de T_{largo} el análisis de Fourier de esta pulsación cuadrada repetida casi periódicamente, consiste en una superposición de armónicos casi discretos de la frecuencia fundamental $\nu_1 = 1/T_1$, siendo realmente cada armónico un continuo de frecuencias que se extiende sobre una banda de ancho $\delta\nu \approx 1/T_{largo}$. Las armónicas más importantes caen entre 0 y $\Delta\nu = 1/\Delta t$.

e) ¿Por qué vale $\Delta t \Delta\nu \approx 1$ si, en principio, podría valer $\Delta t \Delta \nu \gg 1$? ¿La misma pregunta es aplicable a $\delta\nu$ y T_{largo}?

Progación en medios dispersivos

20. Se tiene un pulso de ancho Δk centrado en k_0 tal que la siguiente es una buena aproximación para la relación de dispersión:

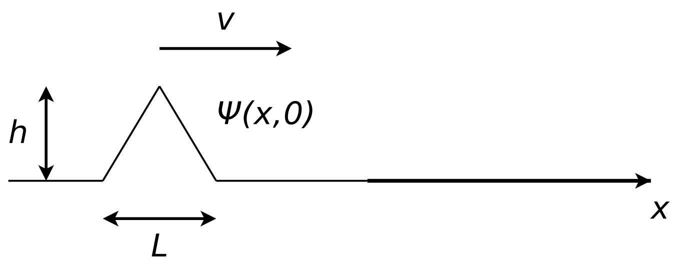
$$\omega(k) = \omega_0(k_0) + \omega'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}\omega''(k_0)(k - k_0)^2$$

Si en $t = 0$ el pulso se propaga hacia $x < 0$, y se escribe:

$$\Psi(x, 0) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2}\right] \exp(ikx)\, dk + c.c.$$

Calcule $\Psi(x, t)$. Vea cuál es la posición y el ancho del paquete como función del tiempo. ¿Es cierto que al viajar por un medio dispersivo cualquier paquete se ensancha?

21. Se tienen dos cuerdas semi-infinitas de distinta densidad lineal de masa, ρ_1 y ρ_2, unidas en un punto y sometidas a una tensión T. Sobre la primera se propaga hacia la derecha una perturbación de la forma indicada en la figura. Se conocen ρ_1, ρ_2, T, L y h. También se considera que los medios son no dispersivos.



a) Hallar el desplazamiento $y(x, t)$.

b) Explique cualitativamente como cambian estos resultados si el medio es dispersivo.