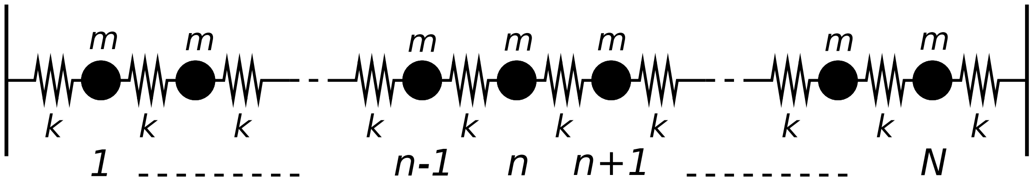
Sistemas discretos periódicos

Modos normales y oscilaciones forzadas en sistemas periódicos

1. Considere el sistema de N masas unidas a resortes de constante elástica k y longitud natural l_0 mostrado en la figura.



   a) Usando la aproximación de pequeños ángulos, escriba la ecuación de movimiento transversal para la partícula enésima.

   b) Proponga una solución de la forma:

$$\Psi_n^{(p)}(t) = A^{(p)} \cos\left(nk^{(p)}a + \alpha^{(p)}\right) \cos\left(\omega^{(p)}t + \phi^{(p)}\right)$$

   Halle la relación de dispersión y grafíquela. ¿Depende esta relación de las condiciones de contorno? ¿Cuánto vale la frecuencia más baja? ¿Qué representa dicho modo?

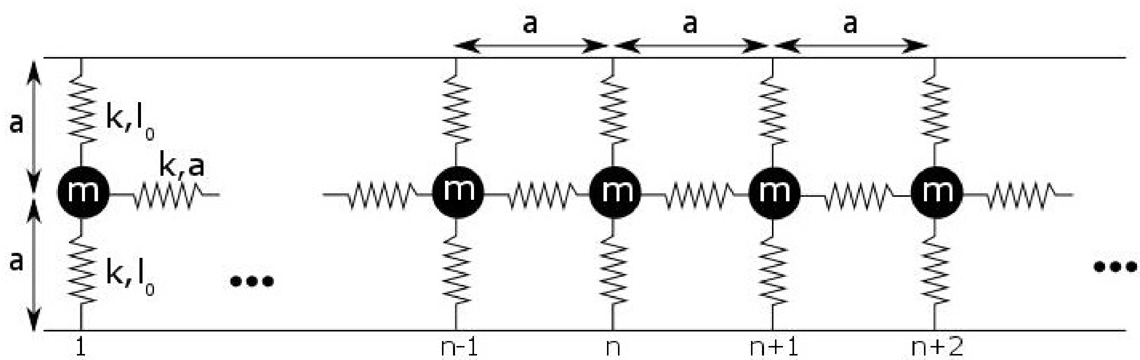
   c) Obtenga las frecuencias correspondientes a los modos normales cuando ambos extremos están fijos y escriba la solución general para la masa enésima.

   d) Ídem. anterior, pero cuando ambos extremos están libres (atención: ¿cómo sería un "extremo libre" en esta configuración?)

   e) *Ídem. anterior, pero considerando que el extremo izquierdo está libre y el derecho fijo a la pared.

   f) Particularice los resultados de $1c$ y $1d$ anteriores para el caso en que $N = 3$.

2. En el sistema de la figura hay N partículas de masa m alineadas a una distancia a. Las mismas están sujetas a las paredes mediante resortes de constante k y longitud natural l_0. A su vez, están vinculadas mediante resortes de constante k y longitud natural a. Hay movimiento sólo en la dirección horizontal.



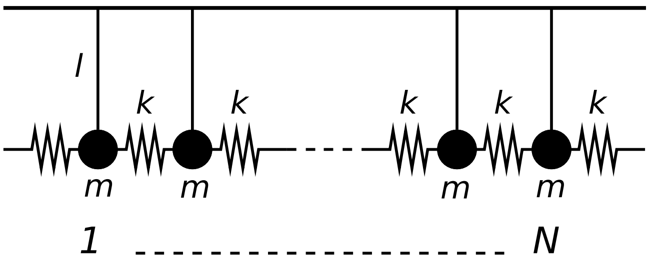
   a) Escriba la ecuación de movimiento para la partícula n-ésima. Indique todas las aproximaciones que realiza.

   b) Proponga una solución adecuada y halle la relación de dispersión. ¿Cuál es la frecuencia más baja posible?

   c) Imponga las condiciones de contorno apropiadas para el sistema y calcule las frecuencias propias del mismo. Escriba la solución para el movimiento de cada partícula.

d) Particularice para el caso N=2 y compare con el resultado que obtiene resolviendo el problema "matricialmente". Esquematice los modos normales de oscilación.

3. Considere el sistema de péndulos acoplados de la figura. Donde todos los resortes tienen la misma longitud natural l_0

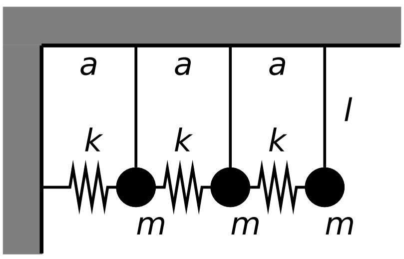


a) Escriba la ecuación de movimiento. Proponga una solución semejante a la del problema 1 y halle la relación de dispersión. Compárela con la obtenida en el problema anterior. ¿Cuánto vale la frecuencia más baja? ¿Qué representa dicho modo?

b) Obtenga las frecuencias correspondientes a los modos normales cuando los resortes de los extremos están fijos y dé las condiciones iniciales para excitar el primer armónico.

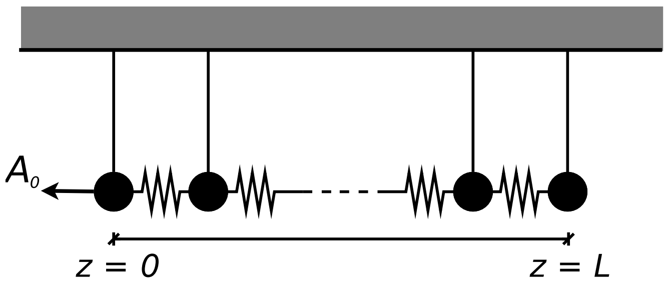
c) Ídem anterior, pero para el caso en que uno de los resortes de los extremos está libre.

d) Especifique el problema c) para 3 péndulos como se muestra en la figura.



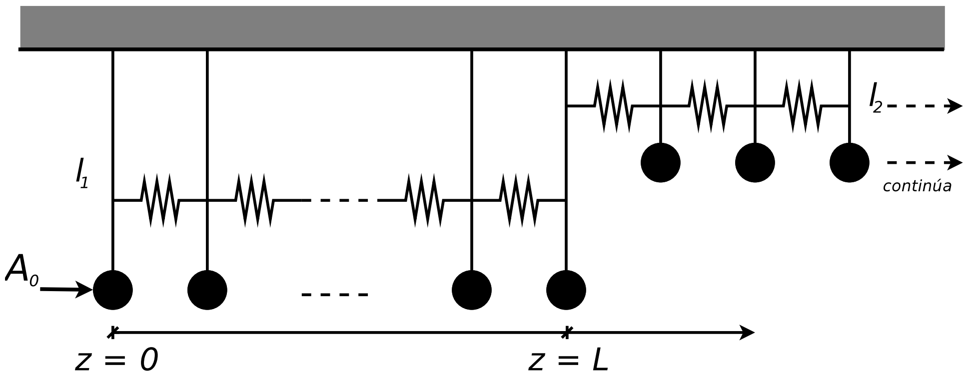
e) Suponga que en el extremo libre se aplica una fuerza $F = F_0 \cos(\omega t)$. Utilizando los modos normales para el sistema sin forzar, halle la solucion estacionaria del problema forzado (considere el problema sin amortiguamiento). ¿Cuáles son las frecuencias de resonancia?

4. *Considere un arreglo lineal de péndulos acoplados excitados cuyo extremo inferior está en $z = 0$ y unidos a una pared rígida en $z = L$, como se muestra en la figura.



Se aplica una fuerza externa en función del tiempo a la primera masa ($z = 0$), de forma tal que se conoce su amplitud $\Psi(0,t) = A_0 \cos(\Omega t)$. Halle el movimiento estacionario del sistema y discuta las hipótesis que hace. Compare con el caso de extremo derecho fijo a una pared (o sea: agregando un resorte a la derecha de la última masa y uniéndolo a la pared).

5. *Considere un sistema de péndulos acoplados con un cambio brusco en ω_0^2 en $z = L$, según se esquematiza en la figura.



a) Discuta cómo tiene que ser Ω para que el sistema se comporte como dispersivo en $0 < z < L$ y y reactivo en $z > L$. ¿Cúal sería la relación entre l_1 y l_2?

b) En dichas condiciones estudie el movimiento estacionario del sistema y encuentre las frecuencias de resonancia.

c) ¿Qué pasa ahora si se invierte la relación entre l_1 y l_2?. ¿De qué variable depende el comportamiento en $z > L$?

d) ¿Es posible encontrar un rango de frecuencias Ω tal que el sistema se encuentre en el mismo rango de comportamiento en $0 < z < L$ y en $z > L$?