10^{ma} Olimpiadas Metropolitanas de Física

Nivel avanzado - Resolución

Prueba de opciones múltiples

- Chequee que el nivel de su prueba sea adecuado.
- No se pueden usar libros ni apuntes.
- La prueba dura un total de 3 horas.
- Cada respuesta correcta suma 1 punto
- Los problemas de opción múltiple representan un 60 % del puntaje total.
- Complete y entregue la grilla de respuestas entregada

Problema 1.

Pregunta 1

Comenzamos definiendo nuestro sistema de referencias en la posición inicial del camión y el sistema de coordenadas de forma tal que el eje x coincida con el sentido de desplazamiento del mismo. Consideramos como $t = 0$ el instante anterior a que se realice la maniobra de sobrepaso. Entonces,

$$x_{\text{c}}(t) = vt \qquad\qquad x_{\text{a}}(t) = D - vt \qquad\qquad x_{\text{i}}(t) = -d + vt,$$

donde x_{c}, x_{a} y x_{i} son las posiciones del camión (de su parte delantera), del auto y del auto inteligente, respectivamente. Definimos el tiempo de encuentro t_{e} como el tiempo en el que se cruzan el auto que viene por el carril contrario y el camión:

$$\begin{aligned} x_{\text{c}}(t_{\text{e}}) &= x_{\text{a}}(t_{\text{e}}) \\ vt_{\text{e}} &= D - vt_{\text{e}} \\ t_{\text{e}} &= \frac{D}{2v}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Por otro lado, sabemos que durante t_{e} el auto inteligente debe realizar toda la maniobra de sobrepaso que implica cambiar de carril, adelantar al camión y volver al carril original, por lo tanto $t_{\text{e}} = t_{\text{s}} + 2t_{\text{c}}$, donde t_{s} es el tiempo que tarda en superar al camión. Comencemos a analizar la maniobra: al pasar de carril el auto inteligente se mueve con velocidad constante, entonces

$$x_{\text{i}}(t_{\text{c}}) = -d + vt_{\text{c}}. \tag{2}$$

A partir de este momento el auto comienza a acelerar,

$$x_{\text{i}}(t) = x_{\text{i}}(t_{\text{c}}) + v(t - t_{\text{c}}) + \frac{a}{2}(t - t_{\text{c}})^2 = -d + vt + \frac{a}{2}(t - t_{\text{c}})^2,$$

donde hemos utilizamos el resultado de la Ec. (2). En un tiempo $t = t_{\text{s}} + t_{\text{c}}$ el auto inteligente debe haber sobrepasado al camión:

$$\begin{aligned} x_{\text{c}}(t_{\text{s}} + t_{\text{c}}) &= x_{\text{i}}(t_{\text{s}} + t_{\text{c}}) \\ v(t_{\text{s}} + t_{\text{c}}) &= -d + v(t_{\text{s}} + t_{\text{c}}) + \frac{a}{2}(t_{\text{s}} + t_{\text{c}} - t_{\text{c}})^2 \\ \frac{2d}{t_{\text{s}}^2} &= a \end{aligned}$$

Por último, usamos que $t_{\text{s}} = t_{\text{e}} - 2t_{\text{c}}$ y la Ec. (1), y remplazamos los datos del problema:

$$a = \frac{2d}{(\frac{D}{2v} - 2t_{\text{c}})^2} = \frac{8v^2 d}{(D - 4vt_{\text{c}})^2} = \frac{8\,(20\,\text{m/s})^2 \cdot 15\,\text{m}}{(600\,\text{m} - 4 \cdot 20\,\text{m/s} \cdot 3\,\text{s})^2} = 10/27\,\text{m/s}^2 \simeq 0{,}37\,\text{m/s}^2.$$

Respuesta correcta **a**.

Pregunta 2

Podemos relacionar el largo de la ruta con el tiempo que tarda en recorrerlo mediante $\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \Delta t = \Delta x/v$. Remplazando en la ecuación de la energía obtenemos:

$$E = \alpha\Delta x + \beta\frac{\Delta x}{v} = \Delta x\left(\alpha + \frac{\beta}{v}\right)$$

Utilizamos los datos para cada camino:

$$E_{\mathrm{A}} = 5000\,\mathrm{m}\left(2\,\mathrm{kJ/m} + \frac{10\,\mathrm{kJ/s}}{25/3\,\mathrm{m/s}}\right) = 16\,\mathrm{MJ}$$
$$E_{\mathrm{B}} = 8000\,\mathrm{m}\left(2\,\mathrm{kJ/m} + \frac{10\,\mathrm{kJ/s}}{200/9\,\mathrm{m/s}}\right) = 17{,}15\,\mathrm{MJ}$$

Por lo tanto el camino más eficiente es A y $\Delta E = 1{,}15\,\mathrm{MJ}$.

Respuesta correcta **a**.

Pregunta 3

Dado que el impulso en las respuestas está expresado en m/s, pasamos la velocidad del auto a estas unidades que, considerando sólo una cifra significativa, resulta $v = 11{,}1\,\mathrm{m/s}$.

El momento lineal o cantidad de movimiento inicial del auto es $p_0 = mv = 11100\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}$. Sabemos que el impulso determina la variación del momento lineal, de modo que:

$$I = \Delta p = p_F - p_0 = -p_0 = -11100\mathrm{N}\cdot\mathrm{s},$$

donde hemos usado el hecho de que queremos saber el impulso necesario para que el auto frene, es decir, para que $p_F = 0$. Como nos piden el módulo del impulso necesario, la respuesta a esa pregunta es $I = 11100\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}$.

Ahora, para saber con qué velocidad llega el auto al puente, debemos considerar el impulso efectivamente aplicado por los frenos, que resulta de:

$$I_{\mathrm{frenos}} = F\cdot\Delta t = -5500\mathrm{N}\cdot 0{,}75\mathrm{s} = -4125\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}$$

donde el signo "–" expresa que la fuerza se aplica en dirección contraria al movimiento (es decir, estamos mirando el impulso sobre un eje, llamémoslo $\vec{x}$, definido de modo que la velocidad del auto es positiva en ese eje, entonces necesariamente la fuerza aplicada por los frenos será negativa con esta elección de sistema de coordenadas). Usando nuevamente que el impulso nos da la variación del momento lineal, tenemos:

$$\begin{aligned}\Delta p =& I_{\mathrm{frenos}}\\ m(v_F - v_0) =& -4125\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}\\ 1000\mathrm{kg}(v_F - 11{,}1\mathrm{m/s}) =& -4125kg\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\\ v_F - 11{,}1\mathrm{m/s} =& -4{,}1\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

resultando en $v_F = 7\,\mathrm{m/s} = 25{,}2\,\mathrm{km/h}$.

Respuesta correcta **d**.

Pregunta 4

Con el objetivo de calcular V_0, en primer lugar se debe realizar un diagrama de cuerpo libre del auto cuando se encuentre saltando. Se debe notar que la única fuerza presente en el mismo es la de la gravedad, en el eje y. Al igual que todo problema de tiro oblicuo, las ecuaciones de movimiento para el mismo serán

$$x = V_0 \cos(45°)t \tag{3}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin(45°)t \tag{4}$$

donde la Ec. (3) corresponde al eje x y la Ec. (4) corresponde al eje y. $V_0 \sin(45°)$ y $V_0 \cos(45°)$ corresponden a las proyecciones de la velocidad en cada uno de los ejes.

Para poder calcular V_0 plantearemos una igualdad entre ambas ecuaciones. Se sabe que el tiempo que tardará en recorrer los 62,5 m en el eje x, será el mismo tiempo que tardará en subir y bajar hasta 0 en el eje y, es decir, hasta el extremo superior del puente. Llamando a este tiempo t_{final}, y remplazando los datos, las Ecs. (3) y (4) resultan

$$t_{final} = \frac{62{,}5\,\mathrm{m}}{V_0 \cos(45°)} \tag{5}$$

$$0 = -\frac{1}{2}gt_{final}^2 + V_0 \sin(45)t_{final} \tag{6}$$

Remplazando 5 en 6 y usando que $\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, obtenemos:

$$0 = -\frac{10\,\mathrm{m/s^2} \cdot (62{,}5\,\mathrm{m})^2}{V_0^2} + 62{,}5\,\mathrm{m}$$

Finalmente, despejamos V_0:

$$V_0 = \sqrt{10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 62{,}5\,\mathrm{m}} = 25\,\mathrm{m/s}$$

Como las opciones de las respuestas están en km/h, realizamos el cambio de unidades y obtenemos el resultado al problema:

$$V_0 = 25\,\mathrm{m/s} = 90\,\mathrm{km/h}$$

Respuesta correcta **b**.

Problema 2.

Pregunta 5

Para resolver el problema remplazamos los datos en la expresión para la presión a una altura h medida desde la superficie de Júpiter:

$$P = P_0 + \rho g h = 48\,822{,}4\,\text{atm} \tag{7}$$

Respuesta correcta **b**.

Pregunta 6

La densidad es el cociente entre la masa M del planeta y su volumen V:

$$\rho = \frac{M}{V}. \tag{8}$$

Para hallar el volumen del planeta lo aproximamos por el volumen de una esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{9}$$

Para hallar la masa M de Júpiter, igualamos el peso de la sonda de masa m cerca de la superficie del planeta, $F = mg$, y la fuerza de interacción entre la sonda de masa m y Júpiter de masa M, descripta por la ley de Gravitación:

$$F = \frac{GmM}{(R+h)^2} \sim \frac{GmM}{R^2}.$$

donde: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{Nm}^2/\text{kg}^2$. Entonces, la masa M resulta:

$$M = \frac{gR^2}{G}. \tag{10}$$

Así remplazamos las Ecs. (9) y (10) en la Ec. (8), hallamos que la respuesta correcta es la **a**.

Pregunta 7

Sabiendo el porcentaje de moles que tengo de H_2 y de He, puedo calcular la relación entre el número de moles de H_2, n_{H_2} y el de He, n_{He}:

$$n_{H_2} = 0{,}82 \cdot (n_{H_2} + n_{He})$$

$$n_{He} = 0{,}18 \cdot (n_{H_2} + n_{He})$$

$$n_{He} = 0{,}22 \cdot n_{H_2} \tag{11}$$

Las moléculas de H_2 gaseoso están formadas por dos átomos de Hidrógeno, entonces el peso de un mol de H_2 es $2\,\text{g}\,\text{mol}^{-1}$

$$m_{H_2} = n_{H_2} \cdot 2\,\text{g}\,\text{mol}^{-1} \tag{12}$$

$$m_{He} = n_{He} \cdot 4\,\mathrm{g\,mol^{-1}} \tag{13}$$

La densidad de Júpiter es la masa total de este dividido su volumen, según la hipótesis que tomamos, la masa será simplemente la suma de la masa de las moléculas de H_2 y la de los átomos de He. Luego remplazo usando las ecuaciones (11), (12) y (13):

$$1{,}33\,\mathrm{g/cm^3} = \frac{M}{V} = \frac{m_{H_2} + m_{He}}{V} = \frac{n_{H_2} \cdot 2\,\mathrm{g\,mol^{-1}} + n_{He} \cdot 4\,\mathrm{g\,mol^{-1}}}{V} = \frac{n_{H_2} \cdot 2{,}88\,\mathrm{g\,mol^{-1}}}{V}$$

Obtengo entonces las densidades molares de cada gas:

$$\frac{n_{H_2}}{V} = 0{,}46\,\mathrm{mol/cm^3} \tag{14}$$

$$\frac{n_{He}}{V} = 0{,}10\,\mathrm{mol/cm^3} \tag{15}$$

Ahora puedo obtener la temperatura del centro de Júpiter mediante la ecuación de estado de los gases ideales, teniendo en cuenta que ambos gases están a la misma temperatura T y que ambos ocupan el mismo volumen V, la presión P será la suma de las presiones parciales, por lo tanto:

$$P \cdot V = (n_{H_2} + n_{He}) \cdot R \cdot T$$

Remplazo lo obtenido en las ecuaciones (14) y (15):

$$P = (\frac{n_{H_2}}{V} + \frac{n_{He}}{V}) \cdot R \cdot T = 0{,}56\,\mathrm{mol/cm^3} \cdot R \cdot T = 4{,}65\,\mathrm{J/Kcm^3} \cdot T$$

Despejo T usando el valor de P dado en el enunciado (para eso convierto de Pa a $\mathrm{N/cm^2}$):

$$T = \frac{2{,}3 \times 10^8\,\mathrm{N/cm^2}}{4{,}65\,\mathrm{Nm/Kcm^3}} = 4{,}9 \times 10^7\,\mathrm{K\,cm\,m^{-1}} = 4{,}9 \times 10^5\,\mathrm{K}$$

Respuesta correcta **c**.

Nota: La temperatura real del centro de Júpiter se estima que es un orden de magnitud menor a la obtenida mediante este cálculo (36 000 K), esto se debe a que la hipótesis de que el gas es ideal falla cuando las presiones son muy grandes. De todos modos este cálculo es una forma cualitativa de predecir que la temperatura en el centro de Júpiter será bastante mayor a la del planeta Tierra (la cual es de 7000 K), debido a que la presión en el centro de la Tierra es un orden de magnitud menor a la presión en el centro de Júpiter.

Pregunta 8

En primer lugar, para ver el sentido del campo eléctrico relativo a la velocidad, recordemos que la fuerza eléctrica sobre cargas positivas es en el sentido de las líneas de campo; y sobre cargas negativas se da en el sentido contrario al campo. Nosotros sabemos que el electrón ingresa con una cierta velocidad y luego se detiene, esto nos indica que la aceleración (y fuerza) que sufre debe ser de sentido contrario al de la velocidad.

En base a estos hechos, podemos deducir que el sentido del campo debe ser el mismo que el de la velocidad, puesto que la fuerza es de sentido opuesto al campo, y por lo tanto, a la velocidad.

Para obtener la energía, podemos utilizar el concepto de *diferencia de potencial eléctrico* (ΔV). Para el campo uniforme, tomando como punto inicial el de ingreso del electrón, y como punto final el de su detenimiento, obtenemos:

$$\Delta V = V_f - V_i = -Ed < 0$$

Esto es consistente con el hecho de que el potencial disminuya al desplazarse en el sentido del campo. La diferencia de energía potencial U entre estos mismos puntos será:

$$\Delta U = q_e \Delta V = -q_e Ed > 0$$

Su signo se debe a que ambas q_e y ΔV son negativas. Como no hay otras fuerzas sobre el electrón, este aumento de energía potencial se ve compensado por una disminución en la energía cinética (K):

$$\Delta K = -\Delta U < 0$$

Sabiendo entonces que la energía cinética final es nula (al detenerse), y que la inicial está dada por $\mathcal{E}$, obtenemos finalmente:

$$\mathcal{E} = -q_e Ed > 0$$

Respuesta correcta **b**.

Vemos que en este problema es fundamental prestar atención a los signos de las cantidades involucradas, y de sus incrementos. Como marco conceptual, es también importante identificar los aspectos cualitativos del movimiento de una carga negativa en un campo eléctrico.

Una resolución alternativa puede obtenerse mediante dinámica y cinemática del movimiento acelerado en una dimensión. Podemos ubicar el origen de nuestro eje x en el punto de ingreso del electrón. Tomando como sentido positivo el dado por la velocidad inicial, la aceleración será $a = -\frac{|q_e|E}{m}$.

Tenemos como datos del movimiento, que para $x = d$, vale $v = 0$, y a partir de las ecuaciones horarias del MRUV, podemos despejar la velocidad inicial v_0. Con ella podemos obtener la energía cinética incial que nos piden: $\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_e v_0^2$.

Pregunta 9

Primero podemos obtener la longitud de onda promedio como:

$$\lambda_{PROM} = (400\,\text{nm} + 860\,\text{nm})/2 = 630\,\text{nm}$$

Con el dato del campo visual de la cámara y la cantidad de píxeles, puede determinarse la resolución de cada píxel:

$$R_{\text{pixel}} = 58\,\text{deg}/1600\,\text{pix} = 58 \cdot 3600\,\text{arcsec}/1600\,\text{pix} = 130{,}5\,\text{arcsec/pix}$$

Luego, con la fórmula dada en el enunciado, puede calcularse el lado de cada píxel:

$$D = 206265 \cdot 630 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}/(130{,}5\,\mathrm{arcsec/pix})$$

$$D = 0{,}001\,\mathrm{m} = 0{,}1\,\mathrm{cm}$$

La lente de la JunoCam tiene 0,1 cm de diámetro (D).
Respuesta correcta **d**.

Pregunta 10

En este problema el enfoque está en los aspectos del movimiento circular uniforme de una carga en un campo magnético, para luego calcular la energía emitida empleando la fórmula de Larmor.

Empecemos considerando la fuerza de Lorentz, que ejerce el campo magnético sobre la carga:

$$F_{\mathcal{L}} = qvB$$

Como nos indica la ayuda, esta fuerza es quien actúa como fuerza centrípeta, y vale la relación:

$$F_{\mathcal{L}} = qvB = ma$$

siendo a la aceleración centrípeta (en este caso la única, pues el movimiento es circular uniforme). De esa manera obtenemos:

$$a = \frac{qvB}{m}$$

Recordemos aquí que la velocidad v no es dato, pero puede obtenerse a partir de la energía cinética de la partícula:

$$v^2 = \frac{2\mathcal{E}}{m}$$

Es de utilidad obtener el período τ del movimiento. Podemos calcularlo recordando que la aceleración centrípeta se relaciona con la velocidad y el radio R de la órbita según $a = v^2/R$. Así podemos despejar R de la ecuación:

$$\frac{qvB}{m} = \frac{v^2}{R}$$

obteniendo así:

$$R = \frac{mv}{qB}$$

El período del movimiento se obtiene tomando el cociente:

$$\tau = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\frac{m}{qB}$$

Es notable observar que este período no depende del radio de la trayectoria ni de la velocidad de la partícula.

Hecho todo esto, con la aceleración podemos calcular la potencia irradiada por la carga mediante la fórmula de Larmor:

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2 a^2}{c^3} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\frac{q^2 v^2 B^2}{m^2} = \frac{4}{3}\frac{q^4 B^2 \mathcal{E}}{c^3 m^3}$$

Para obtener la energía emitida por la partícula en un período, tomamos el producto entre esta potencia y el período del movimiento, antes calculado:

$$W = P\tau = \frac{4}{3}\frac{q^4 B^2 \mathcal{E}}{c^3 m^3} \times 2\pi \frac{m}{qB} = \frac{8\pi}{3}\frac{q^3 B}{c^3 m^2}\mathcal{E}$$

Respuesta correcta **e**.

Aclaración: Si uno verifica la fórmula de Larmor antes escrita, puede parecer que las unidades no son las correctas. Esto se debe a que la fórmula que usamos es válida para las unidades *cgs-Gaussianas*, en las cuales la carga tiene dimensiones de $g^{1/2}cm^{3/2}s^{-1}$, en lugar de Coulombs.

10^{ma} OMF - Nivel avanzado

Grilla de respuestas correctas

Problema	Pregunta	a	b	c	d	e
1	1	X				
	2	X				
	3				X	
	4		X			
2	5		X			
	6	X				
	7			X		
	8		X			
	9				X	
	10					X