11ra Olimpiadas Metropolitanas de Física

Nivel avanzado - Resolución

Prueba de opciones múltiples

- Chequee que el nivel de su prueba sea adecuado.
- No se pueden usar libros ni apuntes.
- La prueba dura un total de 3 horas.
- Cada respuesta correcta suma 1 punto
- Los problemas de opción múltiple representan un 60 % del puntaje total.
- Complete y entregue la grilla de respuestas entregada

Problema 1. Un poco de física médica

Pregunta 1

Respuesta correcta: c)

En primer lugar, para ver el sentido del campo el eléctrico relativo a la velocidad, recordemos que la fuerza eléctrica sobre cargas positivas es en el sentido de las líneas de campo; y sobre cargas negativas (como es este caso) se da en el sentido contrario al campo. Sabemos que el electrón ingresa en reposo y se acelera hasta obtener una velocidad final, esto nos indica que la aceleración (y fuerza) que sufre tiene su sentido a favor de dicha velocidad. Por lo tanto, podemos deducir que el sentido del campo es contrario al de esta velocidad final, puesto que la fuerza sobre este electrón es opuesta al sentido del campo.

Veamos cómo obtener el módulo de este campo: lo más directo es recurrir a la *diferencia de potencial eléctrico* ΔV. Para mayor claridad, tomamos un sistema de referencia con un eje x a lo largo de la cavidad, cuyo sentido coincida con la velocidad del electrón. Podemos decir así que el campo $\mathbf{E}$ apunta en la dirección $-x$. Entre los puntos inicial y final del movimiento, tendremos entonces:

$$V_f - V_i = \Delta V = EL > 0$$

Cabe destacar que la diferencia de potencial es positiva, pues el potencial V disminuye en la dirección que apunta $\mathbf{E}$ (y el electrón se mueve en el sentido contrario). Con esto podemos calcular la diferencia de energía potencial entre los mismos puntos:

$$U_f - U_i = \Delta U = q_e \Delta V = q_e EL < 0$$

Recordemos también que $\Delta U < 0$ pues la carga de electrón q_e es negativa. Como no actúan fuerzas no conservativas (la única fuerza sobre el electrón es la eléctrica) esta disminución en la energía potencial U viene acompañan a de un aumento en la cinética K:

$$K_f - K_i = \Delta K = -\Delta U = q_e EL$$

Sabiendo que $K_i = 0$, $K_f = \mathcal{E}$, tomando módulo a ambos lados podremos obtener:

$$\mathcal{E} = |q_e| EL$$

y podemos despejar finalmente:

$$E = \frac{\mathcal{E}}{|q_e| L}$$

Con respecto a la pregunta *extra* en el problema, vemos que la diferencia de potencial se obtiene en función de $\mathcal{E}$ según $\Delta V = \mathcal{E}/|q_e|$. Nos proponen ver qué pasa si $\mathcal{E}$ es del orden de 150 keV. Recordemos que un *electrón-Volt (eV)* es la energía que gana un electrón al ser acelerado por una diferencia de potencial de 1 Volt. De esa forma, para lograr un aumento de energía de 150 *kilo*-eV (lo que es típico de un acelerador lineal), debemos someter al electrón a una diferencia de potencial de 150 *kilo*-Volts, es decir, de ¡150000 Volts! La necesidad de esta muy alta tensión nos permite entender por qué estos diseños han sido reemplazados (¡por suerte!) por alternativas más seguras.

Pregunta 2

Respuesta correcta b)

Para resolver el problema simplemente es necesario conocer la relación de dispersión de las ondas, en donde $v = \lambda . f$. Allí, la velocidad de propagación es la velocidad de la luz. Por ende, al dividir se obtiene que $\lambda = 1\,\text{Å}$, que es la longitud de onda típica de los rayos X, muy peligrosos por ser éste justamente el tamaño típico de un átomo.

Pregunta 3

Respuesta correcta e)

Acá es importante saber cuanto calor absorbe el agua. Si R es la dosis en Gy y m es la masa en kg, el calor absorbido es $Q_m = mR$ También sabemos que $Q = Cm\Delta T$. Sin embargo, en este caso m está en gramos. De modo que, para resolver el problema, podemos cambiar las unidades de C o usar adecuadamente la masa en kg y g.

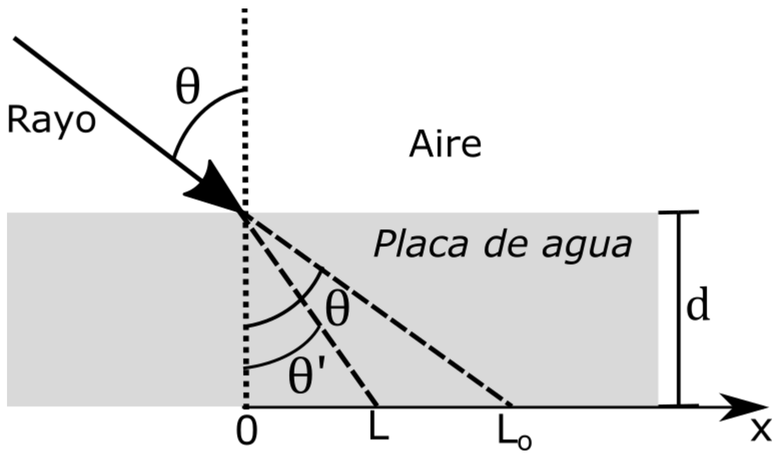
En el primer caso seria tomar $C = 4{,}1813\,\frac{\text{J}}{\text{g°C}} = 4181{,}3\,\frac{\text{J}}{\text{kg°C}}$ y resolver ecuación anterior usando la masa en kg.

La segunda opción seria, tomando como ejemplo los 100 g de agua y $Q_m = 1000\,\frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot 0{,}1\,\text{kg} = 4{,}1813\,\frac{\text{J}}{\text{g°C}} \cdot 100\,\text{g} \cdot \Delta T$. Está claro que ambos métodos son equivalente, entonces podemos calcular las variaciones como $\Delta T_{100\,\text{g}} = \Delta T_{500\,\text{g}} = 0{,}2391\,°\text{C}$ obteniendo que (e) es la respuesta correcta.

Pregunta 4

Respuesta correcta d)

Empezamos definiendo arbitrariamente un eje x respecto al cual vamos a medir las distancias de incidencia L e incidencia sin placa L_0 (ver Figura abajo). Elegimos el 0 a la altura del punto de incidencia por comodidad, pero es claro que es indistinto dado que nos importa el *corrimiento* $R = L_0 - L$.



Usando trigonometría, obtenemos las relaciones

$$L_0 = d \tan\theta$$

$$L = d\tan\theta'$$

Además, la Ley de Snell nos dice que $\sin\theta = n\sin\theta'$.
Sin embargo, para utilizarla debemos reescribir la tangente usando Pitágoras

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

Combinando todo lo anterior tenemos finalmente

$$R = d\sin\theta\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} - \frac{1}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\right),$$

donde reemplazando los valores $\theta = 30^o$, $n = 1{,}333$ y d se obtiene $R = 0{,}17\cdot d$. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (d).

Pregunta 5

Respuesta correcta c)

El movimiento en cada hemisferio es circular, y la fuerza centrípeta está dada por la fuerza magnética que actúa sobre el ion:

$$\vec{F}_c = q\vec{v}\times\vec{B},$$

donde $\vec{v}$ está en el plano del ciclotrón y $\vec{B}$ es saliente del mismo como se veía en la figura. Como esta fuerza mangética es la fuerza centrípeta que determina el movimiento circular deberá ser $F_c = mv^2/R$, donde R es el radio de la última trayectoria circular. De aquí se puede ver que

$$v = \frac{qBR}{m}$$

y la energía cinética a la salida del ciclotrón será

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m}.$$

En cuanto a la frecuencia, sabemos que en un movimiento circular $v = \omega R$, de modo que

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

Esta cantidad es conocida como frecuencia del ciclotrón para una partícula de masa m y carga q en presencia de un campo magnético de módulo B, y no depende del radio del movimiento. En el caso relativista sí depende del radio y se habla de sincrotrón, pues la frecuencia con la que cambia el campo eléctrico debe ir sincronizándose.

Pregunta 6

Respuesta correcta d)

El aparato ilumina un determinado punto de la piel durante un tiempo $t_{exp} = b/\omega$, donde $b = L/R$ es el arco iluminado en radianes. Por su parte, si la piel soporta 1 cGy totales de exposición continua, y absorbe 1,5 cGy/s, entonces el tiempo máximo que puede ser expuesto a la radiación es $t_{\mathrm{exp}} < \frac{1\,\mathrm{cGy}}{1{,}5\,\mathrm{cGy/s}}$. Luego, $\omega > \frac{L}{R}\cdot\frac{1{,}5\,\mathrm{cGy/s}}{1\,\mathrm{cGy}} = 0{,}53\,\mathrm{s}^{-1}$.

Problema 2. La física de los parques de diversiones

Pregunta 7

Respuesta correcta c)

Para resolver este problema vamos a usar el hecho de que conocemos la energía inicial del carrito, y sabemos que sólo se disipa energía en la pista de frenado. Por lo tanto la energía final del sistema es igual a la energía inicial menos aquella que se disipó por fricción.

En el instante inicial la energía mecánica total es:

$$E_0 = mgh + \frac{mv_0^2}{2},$$

donde implícitamente hemos fijado el 0 de energía potencial en la parte baja del recorrido.

El carrito conserva esta energía hasta el momento inmediatamente anterior a ingresar a la zona de rozamiento. Esto es así porque la única fuerza no conservativa presente hasta ese momento es la normal, y ésta es siempre perpendicular al desplazamiento, por lo que no hace trabajo.

En la pista de frenado la fuerza de rozamiento es:

$$F_\mu = -\mu N = -\mu mg,$$

donde el signo negativo indica que la misma se opone al movimiento del carrito. Esta fuerza es no conservativa y a diferencia de la normal, no es perpendicular al desplazamiento, por lo que sí hace trabajo. De hecho F_μ es antiparalela al desplazamiento, por lo cual el trabajo total que realiza a lo largo de todo el tramo de frenado es:

$$W = F_\mu l = -mg\mu l$$

Al salir de la pista de frenado el carrito tiene una velocidad v_f y una energía mecánica:

$$E_f = 0 + \frac{mv_f^2}{2}$$

E_f debe ser igual a la energía E_0 que traía más el trabajo (negativo) de la fuerza de rozamiento W. Entonces,

$$\frac{mv_f^2}{2} = \left(mgh + \frac{mv_0^2}{2}\right) - mg\mu l$$

Y de aquí podemos despejar v_f:

$$v_f = \sqrt{2gh + v_0^2 - 2g\mu l}$$

Con los datos del problema resulta $v_f = 16,29$ m/s.

Pregunta 8

Respuesta correcta e).

La fuerza normal se puede obtener por la ecuación de Newton. Fuera del *loop*, tendremos $0 = ma = N - mg \Rightarrow N = mg$. Una vez ingresado al *loop*, la fuerza normal no deberá solamente contrarrestar a la gravitatoria, sino que además deberá obligar al carrito a girar. Entonces, $m\vec{a} = \vec{N} - mg\hat{z}$, donde $\hat{z}$ se tomará hacia arriba. Ahora bien, esta expresión es más complicada, debido a que debemos tener en cuenta más coordenadas (ya que la aceleración centrípeta estará dirigida hacia el centro del *loop*. No obstante, sólo se pregunta por el valor de la normal cuando el carrito se encuentra en los puntos inferior y superior del *loop*, es decir, cuando la aceleración centrípeta se encuentra en $\hat{z}$.

Entonces, lo que hay que hacer es lo siguiente:

- Encontrar cuál es la velocidad mínima v_{min} que puede tener el carrito en el punto más alto del *loop* ($\theta = \pi/2$) para no caerse.
- Utilizando conservación de la energía, relacionar Δh con la velocidad v_{min}. Esto dará la altura mínima de la que debe ser largado el carrito para completar el *loop*.
- Con esos datos, encontrar cuál es la velocidad que tiene el carrito en la parte inferior del *loop*.

La velocidad mínima que se puede tener en el punto más alto del *loop* para que el carrito no se caiga es aquella en la cual se anula la normal (esta es la sensación de ingravidez). Entonces, como la aceleración centrípeta viene dada por $a_c = \frac{v^2}{R}$,

$$N = mg\,\mathrm{sen}\,(\theta) - m\frac{v^2}{R}$$

Esto resulta en la condición $v_{min} = \sqrt{Rg}$. Para encontrar la velocidad del carrito cuando está en la parte baja del *loop*, planteamos conservación de la energía.

$$\frac{m}{2}v_{min}^2 + mg\Delta h = \frac{m}{2}v^2,$$

donde $\Delta h = 2R$. Entonces, en la parte inferior del *loop*, $a_c = \frac{v^2}{R} = 5g$, por lo que $N = 6g$.

Pregunta 9

Respuesta correcta a)

Si tomamos $\hat{z}$ en la dirección del poste, podemos mirar al sistema en un instante cualquiera y llamar $\hat{x}$ a la dirección que une la silla en cuestión con el poste. De los diagramas de cuerpo libre se observa:

$$\left[m\omega^2(R + \ell\sin\theta_0) - T\sin\theta_0\right]\hat{x} = 0$$
$$\left[T\cos\theta_0 - mg\right]\hat{z} = 0,$$

donde T es la tensión de la soga. De segunda ecuación se obtiene que $T = mg/\cos\theta_0$, y reemplazando en la primera resulta

$$\omega = \sqrt{\frac{g\tan\theta_0}{R + \ell\sin\theta_0}} = \sqrt{1{,}4}s^{-1}$$

Pregunta 10

Respuesta correcta a)

Consideremos a la plataforma y los pasajeros como nuestro sistema de estudio. Como todas las fuerzas son conservativas, la energía del sistema se conserva. Consideremos que el eje z es perpendicular al piso y con sentido positivo hacia arriba, y que el cero de la energía potencial gravitatoria V_{g} se encuentra a la altura del suelo. En el instante inicial, cuando la plataforma está sobre el suelo, la energía es

$$E_0 = V_{\mathrm{g0}} + V_{\mathrm{e0}} = 0 + \frac{1}{2}k\left(h_c^2 + L^2\right) + \frac{1}{2}k\left(h_c^2 + L^2\right) = k\left(h_c^2 + L^2\right),$$

donde se ha utilizado que la longitud natural de los resortes es 0 y el hecho de que los resortes son dos.

Por su parte, en el instante final, cuando la plataforma está en la máxima altura H, la energía es E_{f}

$$E_{\mathrm{f}} = V_{\mathrm{gf}} + V_{\mathrm{ef}} = mgH + k\left((H - h_c)^2 + L^2\right) \tag{1}$$

Igualando las energías y despejando h_c, se obtiene

$$\begin{aligned}
E_0 &= E_{\mathrm{f}} \\
k\left(h_c^2 + L^2\right) &= mgH + k\left((H - h_c)^2 + L^2\right) \\
kh_c^2 + kL^2 &= mgH + kH^2 - 2kHh_c + kh_c^2 + kL^2 \\
0 &= mgH + kH^2 - 2kHh_c \\
h_c &= \frac{mg + kH}{2k} \simeq 72\,\mathrm{m}
\end{aligned} \tag{2}$$

11ra OMF - Nivel avanzado

Grilla de respuestas correctas

Problema	Pregunta	a	b	c	d	e
1	1			X		
	2		X			
	3					X
	4				X	
	5			X		
	6				X	
2	7			X		
	8					X
	9	X				
	10	X				