Problema 1: Cinemática

Pregunta 1: La velocidad de A al chocar con B podemos calcularla mediante conservación de la energía. Como toda la energía potencial se transforma en cinética en el momento del impacto,

$$\begin{aligned} E_c &= E_p \\ \frac{1}{2} m\, v_A^2 &= m\, g\, h \\ v &= \sqrt{2\, g\, h} \end{aligned}$$

Como los choques son elásticos, en todos los choques se conserva la energía. Junto con la conservación de la cantidad de movimiento (que se da en todo tipo de choques), tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} m\, \sqrt{2\, g\, h} &= m\, (v_A + v_B) \qquad \text{y} \\ \frac{1}{2} m\, (2\, g\, h) &= \frac{1}{2} m\, (v_A^2 + v_B^2) \end{aligned}$$

Este sistema se puede resolver rápidamente si despejamos la primera e insertamos el resultado en la segunda,

$$2\, g\, h = \left(\sqrt{2\, g\, h} - v_B\right)^2$$

y obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} v_A &= 0 \\ v_B &= \sqrt{2\, g\, h} \end{aligned}$$

La colisión de B con C sigue las mismas ecuaciones, por lo que podemos concluir que $v_C = \sqrt{2\, g\, h}$. Así, como en el punto más alto de C toda la energía cinética se transforma en cinética, podemos concluir que $h_C = h$. Para calcular la altura de A, directamente restamos la proyección de la cuerda, $h = 1\,\text{m} - 1\,\text{m} \cdot \cos 60° = 0{,}5\,\text{m}$.

Pregunta 2: De la cuenta anterior podemos concluir que el resultado no depende de la masa, es decir, $h_C = 0{,}5\,\text{m}$.

Pregunta 3: La idea de la cuenta es idéntica a la pregunta 1, pero ligeramente más complicada algebraicamente. Dejamos aquí planteadas las ecuaciones que hay que resolver y el resultado final:

$$\begin{aligned} v_A^I &= \sqrt{2\, g\, h} && \text{(Velocidad de impacto de A)} \\ 1\,\text{kg}\, v_A^I &= 1\,\text{kg}\, v_A^F + 2\,\text{kg}\, v_B^I && \text{(Conservación de cantidad de movimiento)} \\ \frac{1}{2}\, 1\,\text{kg}\, (v_A^I)^2 &= \frac{1}{2}\, 1\,\text{kg}\, (v_A^F)^2 + \frac{1}{2}\, 2\,\text{kg}\, (v_B^I)^2 && \text{(Conservación de Energía)} \end{aligned}$$

De estas ecuaciones, obtenemos $v_B^I = 2/3\, \sqrt{2\, g\, h}$. Con esta velocidad de impacto, realizamos las ecuaciones para el choque de B con C:

$$\begin{aligned} v_B^I &= \frac{2}{3}\, \sqrt{2\, g\, h} && \text{(Velocidad de impacto de A)} \\ 2\,\text{kg}\, v_B^I &= 2\,\text{kg}\, v_B^F + 3\,\text{kg}\, v_C && \text{(Conservación de cantidad de movimiento)} \\ \frac{1}{2}\, 2\,\text{kg}\, (v_B^I)^2 &= \frac{1}{2}\, 2\,\text{kg}\, (v_B^F)^2 + \frac{1}{2}\, 3\,\text{kg}\, (v_C)^2 && \text{(Conservación de Energía)} \end{aligned}$$

y de aquí resulta $v_C = 8/15\,\sqrt{2\,g\,h}$. Como esta energía cinética se transforma en potencial,

$$3\,\mathrm{kg}\,g\,h_C = \frac{1}{2}\,3\,\mathrm{kg}v_c^2$$
$$h_c = \frac{64}{255}\,h$$

Pregunta 4: En este caso entonces, todo lo que necesitamos es que la energía mecánica inicial sea igual a la final (la masa C a 0,75 m de altura, $E_F = 1\,\mathrm{kg}\,g\,0{,}75\mathrm{m}$). La energía inicial es $E_I = 1/2\,1\,\mathrm{kg}\,v^2 + 1\,\mathrm{kg}\,g\,h_0$. Igualando ambas y despejando, obtenemos $v = 2{,}24\,\mathrm{m/s}$.

Problema 2: Hidrostática

Pregunta 5: Ya que el peso del sistema es el mismo, para lograr el equilibrio el volumen sumergido del sistema tiene que ser el mismo, no importa dónde pongas el equipo (pues $P = V_{sumergido} \cdot P_{esp}$, y todas las variables se mantienen sin importar la ubicación del equipo adicional). Para que el submarino esté lo más a flote posible, ya que el volumen sumergido del sistema es el volumen sumergido del equipo más el del submarino, conviene sumergir todo el equipo. Entonces, la respuesta correcta es que el equipo adicional debe estar abajo en cualquier caso, o sea, la opción **d**.

Pregunta 6: Para resolver esto hay que pedir que el peso del submarino sea mayor al empuje. Entonces,

$$P > (V + V_{globo}) \cdot (\text{peso especifico del agua}) \quad \Rightarrow \quad \cancel{g} \cdot 100000\text{Kg} > (80\text{m}^3 + V_{globo}) \cdot 1000\text{Kg/m}^3 \cdot \cancel{g} \tag{1}$$

Despejando V_{globo} y transformando esa desigualdad en una igualdad se obtiene el volumen final máximo del globo para que el sistema submarino y globo se hunda. Entonces,

$$\frac{100000\text{Kg}}{1000\text{Kg/m}^3} - 80\text{m}^3 = 20\text{m}^3 = V_{f,globo} \tag{2}$$

Para relacionar la temperatura del gas antes y después, dado que la presión se mantiene constante, se puede utilizar la Ley de Charles y Gay Lussac. Entonces,

$$T_f = V_{f,globo} \cdot \frac{T_i}{V_{i,globo}} \quad \Rightarrow \quad T_f = 20\text{m}^3 \cdot \frac{600\text{K}}{50\text{m}^3} = 240\text{K} \tag{3}$$

Luego, la opción correcta es la **a**.

Problema 3: Electrostática

Pregunta 7: Este punto se resuelve por inspección de cada uno de los casos mencionados. La idea no es hacer un cálculo riguroso en el examen, sino fijarse sobre el haz cuándo confinan y cuándo no. De todos modos, para hacerlo efectivamente, hay que buscar los puntos de campo eléctrico nulo sobre el eje del haz de iones y ver si las fuerzas al desplazarlo de este punto son restitutivas.

Pregunta 8: El campo generado por la placa es uniforme, y de valor $E_0\,\hat{x}$, mientras que el generado por cada fuente Q sobre el eje es, de acuerdo al enunciado, $E_h = k\,Q/r^3$. Como en el eje y los campos de las cargas puntuales se anulan (porque apuntan en sentido opuesto) y en el eje x son iguales, resulta que el campo total es:

$$E = E_0 + 2\,\frac{k\,Q}{r^3}$$

Con $r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2}$, despejamos y hallamos

$$d = \sqrt{\frac{E_0}{kQ}^{2/3} - \frac{a^2}{4}}$$

Pregunta 9: Por inspección también, podemos ver que en este caso todas las fuerzas son restitutivas, de modo que el sistema está confinado.

Problema 4: Termodinámica

Pregunta 10: Podemos usar directamente la ecuación de calorimetría:

$$Q = m\, c_e\, \Delta T$$
$$m = \frac{Q}{c_e\, \Delta T}$$

Pregunta 11:

Llamando P_{ent} al calor entregado por la bomba por unidad de tiempo y P_{cons} al trabajo consumido por unidad de tiempo, el enunciado indica que el coeficiente de rendimiento η, viene definido según $\eta = P_{\text{ent}}/P_{\text{cons}}$. Entonces

$$P_{\text{cons}} = \frac{P_{\text{ent}}}{\eta},$$

donde $\eta = 3{,}3$, y $P_{\text{ent}} = 1{,}8$ kW, pues su resultado debe ser el mismo que el de la estufa que va a reemplazar. El ahorro A de energía, por unidad de tiempo, es la diferencia entre el consumo de la estufa reemplazada (igual a P_{ent}) y el consumo de la bomba de calor (P_{cons}), es decir:

$$A = P_{\text{ent}} - P_{\text{cons}} = P_{\text{ent}} - \frac{P_{\text{ent}}}{\eta} = P_{\text{ent}}\left(1 - \frac{1}{\eta}\right).$$

$$\Delta t = \frac{Q}{P_{\text{ent}}\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)} = 239 \text{ s},$$

que es el tiempo que debe transcurrir para que el ahorro sea el calor necesario para calentar el agua, luego de efectuar los reemplazos necesarios.

Pregunta 12: Tanto la cocina como el horno reciben y pierden calor. (El exterior también recibe calor). La situación es estacionaria: se indica que el horno permanece a temperatura constante, y, si la cantidad de calor que pierde la cocina por unidad de tiempo es constante, entendemos que la cocina también permanece a temperatura constante. Entonces, el calor que recibe cada uno y el que pierde cada uno deben ser iguales. En adelante todos los Q que aparezcan serán por unidad de tiempo.

En el caso de la cocina, la misma recibe calor de la bomba de calor que servía como estufa $Q_{\text{ent}} = 1{,}8$ kW y del horno, que pierde $Q_{\text{p,h}} = 1{,}2$ kW; y pierde calor hacia el mecanismo de la bomba de calor del horno Q_{f}, y hacia el exterior $Q_{\text{p,c}} = 2{,}8$ kW. Entonces:

$$Q_{\text{ent}} + Q_{\text{p,h}} = Q_{\text{f}} + Q_{\text{p,c}}$$
$$Q_{\text{f}} = Q_{\text{ent}} + Q_{\text{p,h}} - Q_{\text{p,c}},$$

con lo cual obtenemos el calor (por unidad de tiempo) que recibe la bomba de calor del horno.

El horno recibe el calor que deposita en él su bomba de calor Q_{c} y pierde el conocido $Q_{\text{p,h}}$. Entonces:

$$Q_{\text{c}} = Q_{\text{p,h}}.$$

Como antes, el coeficiente de rendimiento η' de la bomba de calor en el horno viene dado por la relación entre el calor depositado en el horno (que es Q_{c}) y el trabajo (consumo eléctrico) L, es decir, $\eta' = Q_{\text{c}}/L$. Pero teniendo en cuenta que, por la conservación del calor, debe ser $Q_\mathrm{c} = Q_\mathrm{f} + L$, donde Q_f es justamente la energía que la bomba de calor extrae, podemos expresar $L = Q_\mathrm{c} - Q_\mathrm{f}$, con lo cual

$$\eta' = \frac{Q_\mathrm{c}}{Q_\mathrm{c} - Q_\mathrm{f}} = \frac{Q_\mathrm{p,h}}{Q_\mathrm{p,h} - (Q_\mathrm{ent} + Q_\mathrm{p,h} - Q_\mathrm{p,c})} = \frac{Q_\mathrm{p,h}}{Q_\mathrm{p,c} - Q_\mathrm{ent}} = 2{,}7.$$

La respuesta correcta es la **a**.

Pregunta 13: El ángulo de incidencia sobre la superficie B es $\delta_B = 90° - \alpha/2 = 90° - 50° = 40°$, y el ángulo sobre la superficie C es $\delta_C = 90° - (180° - \alpha - \alpha/2) = 60°$.

La condición para que no haya rayo transmitido en B y en C es

$$\mathrm{sen}\delta_{B,C} \geq \frac{1}{n}$$

Reemplazando con los valores del enunciado, obtenemos $n = 1{,}56$.

Pregunta 14: La respuesta a este punto puede darse en forma totalmente geométrica: si $\alpha = 90°$, entonces $\delta_B = \delta_C = 45°$. Es decir que el rayo reflejado en B y que incide en C es paralelo a la superficie A y entonces el rayo reflejado en C es perpendicular a la superficie A

Pregunta 15:

$$\begin{aligned}
\delta_C &= 90° - \frac{\alpha}{2} = 40° \\
\delta_B &= 90° - (180° - \alpha - \frac{\alpha}{2}) = 60°
\end{aligned}$$

El ángulo del rayo transmitido en la superficie A debe ser

$$\begin{aligned}
\theta_{tA} &= \frac{\alpha}{2} + \left(180° - \alpha - \frac{\alpha}{2}\right) + 2\,\delta_B - 180° \\
&= 50° + 30° + 2 \cdot 60° - 180° \\
&= 20°
\end{aligned}$$

usando la ley de Snell, obtenemos

$$\mathrm{sen}\theta_{tA} = n\,\mathrm{sen}\theta$$

y consecuentemente $\theta = 35{,}55°$