Resolución del Nivel Inicial - Problemas de Opción Múltiple

Problema 1: Cinemática

Pregunta 1: Para que la flecha impacte perpendicularmente sobre la pared debe suceder que, en dicho instante, la velocidad vertical se anule. De esta forma, el vector velocidad será paralelo al piso (versor $\hat{x}$) y, en consecuencia, perpendicular a la pared (versor $\hat{y}$). Para resolverlo hay, primeramente, que escribir la ecuación de movimiento en $\hat{x}$ de la flecha. De esta manera, se podrá calcular el tiempo t_1 que tarda en llegar a la pared en función del ángulo de disparo. O sea

$$\text{(Flecha: } \hat{x}\text{)} \qquad x_{flecha}(t) = 0 + v_0 \cos(\alpha) \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad t_f = \frac{x_{pared}}{v_0 \cos(\alpha)} \tag{1}$$

donde se ha considerado, para simplificar la notación, que la flecha sale del origen a un tiempo $t_0 = 0$.

Por su parte, se quiere que $v_{y,flecha}(t_f) = 0$. Entonces,

$$\text{(Flecha: } \hat{y}\text{)} \qquad v_{y,flecha}(t) = v_0 \operatorname{sen}(\alpha) - gt \qquad \Rightarrow \qquad t_f = \frac{v_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{g} \tag{2}$$

Entonces, igualando estas dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{x_{pared}}{v_0 \cos(\alpha)} = \frac{v_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{g} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x_{pared} \cdot g}{v_0^2} = \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha)/2 \tag{3}$$

donde en la última igualdad se utilizó la ayuda que aparece en el enunciado. Despejando y reemplazando, se obtiene $\alpha = 6{,}42°$. Luego, la opción correcta es la **c**.

Pregunta 2: Una forma de responder esta pregunta es darse cuenta de que si se pone el origen de coordenadas en la posición inicial de la flecha, entonces la manzana se encuentra en el punto (80m,0m). Si se utiliza el ángulo encontrado en la pregunta 1, se ve que la altura máxima de la trayectoria se encuentra en $x = 40$m. Como la única aceleración actuante es la debida a la gravedad, la trayectoria de la flecha es una parábola, simétrica respecto de $x = 40$m. Entonces, si el ángulo es el mismo que en la pregunta anterior, en $x = 80$m la flecha se encontrará a la misma altura que en $x = 0$m, y de estar forma Guillermo Tell acertará a la manzana.

Otra forma de resolverlo es planteando las ecuaciones de movimiento para la flecha. Las condiciones que se deben cumplir para que la flecha atraviese la manzana son $x(t_e) = x_m = 80$m y $y(t_e) = 0$m. Entonces, si $t_0 = 0$,

$$\text{(Flecha: } \hat{x}\text{)} \qquad x_{flecha}(t) = 0 + v_0 \cos(\beta) \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad x_m = v_0 \cos(\beta) \cdot t_e \tag{4}$$

$$\text{(Flecha: } \hat{y}\text{)} \qquad y_{flecha}(t) = 0 + v_0 \operatorname{sen}(\beta) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = v_0 \operatorname{sen}(\beta) \cdot \cancel{t_e} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_e^{\cancel{2}} \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Despejando t_e en 4 y reemplazándolo en 5, se obtiene

$$0 = v_0 \operatorname{sen}(\beta) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x_m}{v_0 \cos(\beta)} \right) \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{x_m g}{v_0^2} \right) \tag{7}$$

Notando que $x_m = 2 \cdot x_{pared}$, se observa que este resultado es efectivamente idéntico al del problema 1. Luego, la respuesta correcta es la **b**.

Pregunta 3: En este caso, estamos frente a un problema de encuentro bastante clásico. Para resolverlo (sin suponer que es un problema conocido) conviene escribir las ecuaciones de movimiento de la flecha y de la manzana en ambos ejes:

$$\text{(Flecha: } \hat{x}\text{)} \qquad x_{flecha}(t) = 0 + v_0 \cos(\gamma) \cdot t \tag{8}$$

$$\text{(Flecha: } \hat{y}\text{)} \qquad y_{flecha}(t) = 0 + v_0 \operatorname{sen}(\gamma) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \tag{9}$$

$$\text{(Manzana: } \hat{x}\text{)} \qquad x_{manzana}(t) = x_0 \tag{10}$$

$$\text{(Manzana: } \hat{y}\text{)} \qquad y_{manzana}(t) = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \tag{11}$$

donde se ha considerado $t_0 = 0$ y que γ es el ángulo de disparo de la flecha.

El encuentro se dará cuando $x_{flecha}(t_e) = x_{manzana}(t_e)$ y $y_{flecha}(t_e) = y_{manzana}(t_e)$ para algún t_e. Entonces, evualuando en $t = t_e$, podemos igualar las ecuaciones 8 con 10 y 9 con 11. Se obtiene:

$$(\hat{x}) \qquad v_0 \cos(\gamma) \cdot t = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad v_0 t \cdot \cos(\gamma) = x_0 \tag{12}$$

$$(\hat{y}) \qquad v_0 \operatorname{sen}(\gamma) \cdot t - \cancel{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2} = y_0 - \cancel{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2} \qquad \Rightarrow \qquad v_0 t \cdot \operatorname{sen}(\gamma) = y_0 \tag{13}$$

Dividiendo estas dos ecuaciones, se obtiene que $\operatorname{tg}(\gamma) = y_0/x_0$. O sea, para acertarle a la manzana, Guillermo Tell debe apuntarle a la manzana cuando vaya a disparar. Luego, la opción correcta es la **c**.

Problema 2: Dinámica

Pregunta 4: Hay varios enfoques posibles para resolver el problema.

En equilibrio, la regla se puede pensar como una palanca con punto de apoyo en los dedos. Las fuerzas que deben balancearse son el peso de la regla a ambos extremos del punto de apoyo y el peso de la goma.

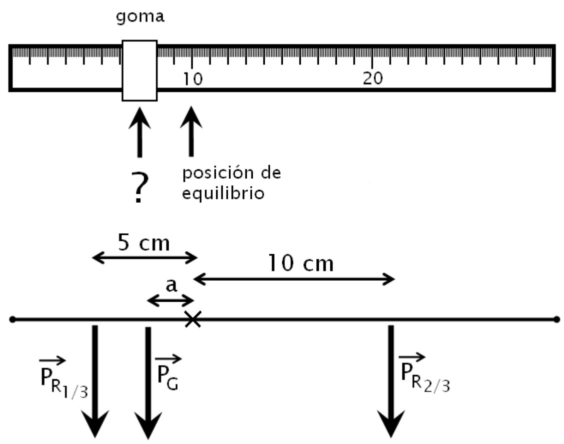

Figura 1: Esquema del problema 2

En términos de ecuaciones, la condición de equilibrio implica un balance de las fuerzas multiplicadas por sus respectivos brazos de palanca (distancia entre el punto de apoyo de la palanca y el punto de aplicación de cada fuerza)

$$5cm \cdot P_{R_{1/3}} + a \cdot P_G = 10cm \cdot P_{R_{2/3}} \tag{14}$$

En esta ecuación, la suma entre el término debido al peso del lado izquierdo de la regla (1/3 de la regla) y el debido al peso de la goma debe ser igual al término correspondiente al peso del lado derecho de la regla (2/3 de la regla). En todos los casos, como se trata de objetos con distribución uniforme de masa, se consideró que el punto de aplicación de la fuerza peso es el centro geométrico de cada objeto.

Considerando que $P = m \cdot g$, la ecuación se puede reescribir

$$5cm \cdot \frac{27g}{3} + a \cdot 20g = 10cm \cdot \frac{2{,}27g}{3} \tag{15}$$

De donde se despeja el valor de $a = 6{,}75$cm. Hay que tener en cuenta que el enunciado toma como referencia el extremo "0" de la regla. Por esta razón, el resultado final es 3,25cm ($=10cm - a$).

Una forma alternativa de resolver el problema requiere estar familiarizado con el concepto de centro de masa. El conjunto de la regla con la goma se puede pensar como un objeto irregular. Para que haya equilibrio, debe ocurrir entonces que el punto de aplicación de la fuerza peso (el centro de masa) coincida con el punto de aplicación de la fuerza normal que ejercen los dedos. De lo contrario, se produciría un torque que haría caer la regla (ver fig. 2).

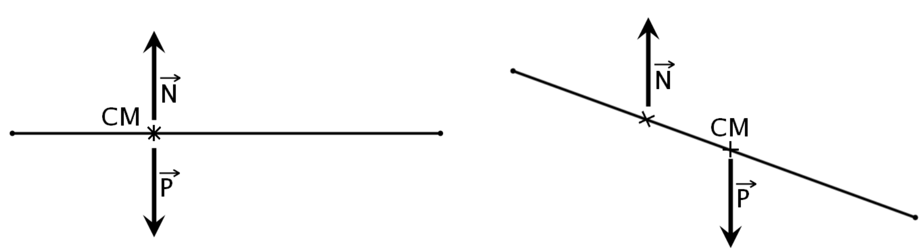

Figura 2: Desequilibrio que generado por distintos puntos de aplicación de la fuerza peso y la fuerza normal

Siguiendo este análisis, el enunciado implica que el centro de masa debe estar ubicado en el centímetro 10. La definición de centro de masa (R_{CM}) es

$$R_{CM} = \frac{\sum_i r_i \cdot m_i}{M} \tag{16}$$

donde r_i, m_i es la posición y la masa de cada componente "i" del objeto, y M es la masa total del objeto ($M = \sum_i m_i$).

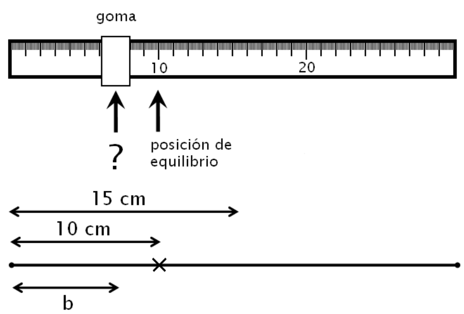

Figura 3: Esquema para plantear el segundo método

Tomando como referencia el extremo "0" de la regla, debe ocurrir que

$$10cm = \frac{b \cdot 20g + 15 \cdot 27g}{20g + 27g} \tag{17}$$

De esa ecuación se obtiene el valor $b = 3{,}25$cm. Por lo tanto, la opción correcta es la **a**.

Pregunta 5: Este item se puede resolver a partir de intuición y un poco de descarte. Hay que determinar cuál es el gráfico que describe la variación de la posición de equilibrio al variar la masa de una goma que se adhiere en el extremo "0" de la regla.

En primer lugar, si la masa de la goma es cero, es como si no estuviera. Así que para m=0, el equilibrio queda ubicado en el centro geométrico de la regla. Este argumento descarta las opciones *a*) y *e*).

En segundo término, a medida que la masa de la goma aumenta, la posición de equilibrio se debe ir aproximando cada vez más al punto donde se ubica la goma. En el límite de masa tendiendo a infinito la regla se vuelve un objeto despreciable y es como si sólo estuviera la goma, es decir, el equilibrio se debe acercar al centímetro 0. De esta forma quedan descartadas las alternativas *c*) y *d*).

Luego, la opción que describe el comportamiento correctamente resulta la **b**.

También es posible encontrar la expresión analítica del equilibrio, aunque tiene un nivel de dificultad mayor. Por ejemplo, analizando el problema con el enfoque tipo palanca, se puede plantear el siguiente esquema

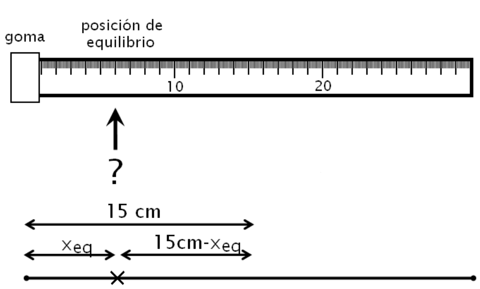

Figura 4: Esquema para la pregunta 5

De forma análoga al primer item, permite plantear las siguientes ecuaciones

$$x_{eq} \cdot m = (15cm - x_{eq}) \cdot 27g \Rightarrow x_{eq}(m) = \frac{15cm}{\frac{m}{27g} + 1} \tag{18}$$

Esta relación funcional de x_{eq} con m se corresponde con la gráfica **b**.

Pregunta 6: El último ítem hace referencia a la etapa dinámica del experimento, antes de alcanzar el estado de equilibrio (¡y sin usar ninguna goma!). La idea es realizar un análisis intuitivo del comportamiento complejo del sistema e identificar las fuerzas que intervienen.

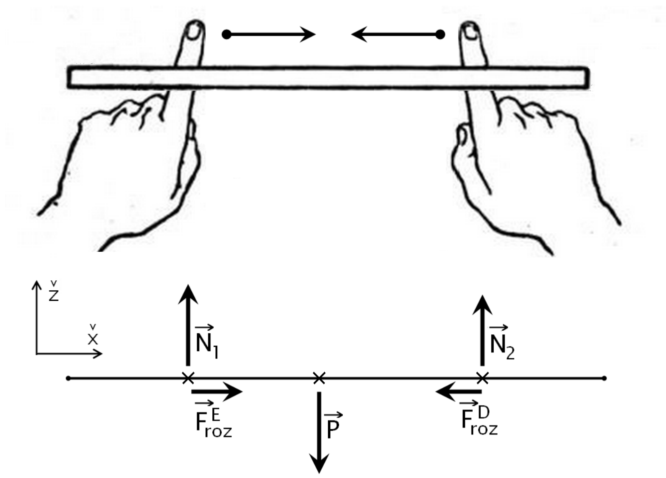

Figura 5: Esquema para la pregunta 6

En la dirección de $\hat{z}$ las fuerzas son las mismas que aparecen en el estado de equilibrio, con la diferencia de que sus puntos de aplicación no coinciden. El peso se aplica en el centro geométrico de la regla y -como no hay movimiento en la dirección $\hat{z}$- se equilibra con las fuerzas normales que ejercen los dedos en sus respectivos puntos de contacto.

A medida que los dedos se acercan entre sí, en la dirección de $\hat{x}$ comienza a actuar la fuerza de rozamiento que se opone a ese movimiento. Alternativamente, se produce el desplazamiento de la regla en el punto de contacto con uno de los dedos, donde actúa la fuerza de rozamiento dinámico; mientras tanto, no hay movimiento neto debajo del otro dedo: allí actúa una fuerza de rozamiento estático. De esta forma, mientras se acercan entre sí, los dedos se turnan entre el rol "estático" y el "dinámico".

En consecuencia, la respuesta correcta es la **d**.

Problema 3: Energía

Pregunta 7: Haciendo un balance energético y sabiendo que no hay pérdidas, se obtiene

$$\Delta E = 0 = E_f - E_i = T_f - V_i = \frac{m}{2}v_a^2 - mgD\,\mathrm{sen}(\alpha) \qquad \Rightarrow \qquad v_a = \sqrt{2gD\,\mathrm{sen}(\alpha)} = 2\mathrm{m/s} \tag{19}$$

Este mismo resultado es posible encontrarlo utilizando las leyes de Newton y cinemática. Usando que $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ y notando que el movimiento se da sólo en la dirección paralela al plano inclinado (coordenada $\hat{x}$) se obtiene

$$\hat{x})P_x = ma_x \quad \Rightarrow \quad a_x = g\,\mathrm{sen}(\alpha) \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{g\,\mathrm{sen}(\alpha)t^2}{2} \tag{20}$$

donde se ha tomado $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$. Entonces, si el carrito llega a la base en un tiempo t_f,

$$D = \frac{g\,\mathrm{sen}(\alpha)t_f^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t_f = \sqrt{\frac{2D}{g\,\mathrm{sen}(\alpha)}} \Rightarrow \tag{21}$$

$$\Rightarrow v(t) = v_0 + at = g\,\mathrm{sen}(\alpha)t \qquad \Rightarrow \qquad v_a = \sqrt{\frac{2D}{g\,\mathrm{sen}(\alpha)}}g\,\mathrm{sen}(\alpha) = \sqrt{2gD\,\mathrm{sen}(\alpha)} = 2\mathrm{m/s} \tag{22}$$

Luego, la opción correcta es la **b**.

Pregunta 8: Si el carrito pudiera dar vuelta en el rulo, su velocidad en el punto más alto se podría hallar mediante un balance energético.

$$\Delta E = 0 = E_f - E_i = T_f + V_f - T_i = \frac{mv_r^2}{2} + mg2R - \frac{mv_a^2}{2} = 0 \tag{23}$$

$$v_r = \sqrt{v_a^2 - 4gR} = \sqrt{2gD\,\mathrm{sen}(\alpha) - 4gR} = 1\mathrm{m/s} \tag{24}$$

Ahora bien, para que esta resolución sea correcta, se debe comprobar que el carrito estuvo en todo tiempo en contacto con la pista (o sea, que no se cayó). El punto del rulo donde más riesgo tiene de caerse es el punto más alto, pues es donde menor velocidad tiene. En ese lugar, la fuerza centrífuga que siente el carrito desde su sistema de referencia debe ser mayor a su peso. Entonces, debe cumplirse

$$\cancel{m}\frac{v_r^2}{R} > \cancel{m}g \tag{25}$$

Reemplazando por los valores obtenidos, se observa que esta desigualdad se cumple. Por lo tanto, el carrito no cae cuando pasa por el rulo.

Luego, la opción correcta es la **a**.

Pregunta 9: Por conservación de la energía, la velocidad con la que el carrito sale del rulo es la misma que la que tiene cuando llega a la base de la rampa. Por otro lado, después del rulo, hay una pérdida de energía debido al sector con rozamiento. Esta diferencia de energía afectará la velocidad del carrito.

$$\Delta E = W_{FNC} = T_f - T_i = \frac{mv_d^2}{2} - \frac{mv_c^2}{2} = -F_{roz}d \tag{26}$$

$$F_{roz} = \mu N = \mu mg \tag{27}$$

$$\Rightarrow \quad v_d = \sqrt{v_c^2 - 2\mu gd} = \sqrt{2gD\,\mathrm{sen}(\alpha) - 2\mu gd} \tag{28}$$

Luego de esto, se comprime el resorte hasta el reposo del móvil

$$\Delta E = 0 = V_f - T_i = \frac{k\Delta L^2}{2} - \frac{mv_d^2}{2} \tag{29}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta L = \sqrt{\frac{m}{k}(2gD\,\mathrm{sen}(\alpha) - 2\mu gd)} = 8{,}5\mathrm{cm} \tag{30}$$

Luego, la opción correcta es la **e**.

Problema 4: Calorimetría

Pregunta 10: En primer lugar se debe estimar el volumen del lago, multiplicarlo por la densidad del hielo y así calcular su masa. Suponiendo que éste es un cilindro de diámetro D y de altura h, el volumen de hielo es $V = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h$.

Por otra parte se conoce que la eficiencia de transferencia de calor de un tanque de combustible es del 85 %, siendo $15 \cdot 10^6$kJ el calor bruto que puede entregar el tanque de combustible. Haciendo una regla de tres se obtiene que el calor neto que el tanque de combustible puede entregar es $12{,}75 \cdot 10^6$kJ. Para poder derretir el lago completo se debe entregar una cantidad de calor que se puede conocer utilizando la ecuación calorimétrica. En primer lugar se debe considerar el calor necesario para que el hielo aumente su temperatura desde -2°C hasta 0°C y luego se debe calcular el calor necesario de modo que un cuarto de todo el hielo cambie de fase al estado líquido.

$$Q_1 = m_{hielo} c_{hielo} \Delta T = \delta_{hielo} V_{hielo} c_{hielo} \cdot (0 - (-2))^\circ C = 15 \cdot 10^6 kJ \tag{31}$$

$$Q_2 = \frac{m}{4} \cdot l = \frac{\delta_{hielo} V_{hielo}}{4} \cdot 334 kJ/kg = 305 \cdot 10^6 kJ \tag{32}$$

$$Q_1 + Q_2 = (15 + 305) \cdot 10^6 kJ = 320 \cdot 10^6 kJ \tag{33}$$

Dado que un tanque de combustible puede aportar $12{,}75 \cdot 10^6$kJ, si se divide el valor anterior del calor total por dicho valor se obtiene 25.1 tanques de combustible, o sea, la cantidad de tanque de combustible necesarios para fundir un cuarto del lago. Luego, la opción correcta es la **a**.

Pregunta 11: Con los datos de la tabla se calcula la cantidad de calor necesario para que el líquido refrigerante cambie completamente de fase. Entonces, se requiere calcular el cambio de temperatura dentro de la misma fase y luego el calor necesario para el cambio de fase.

$$Q_1 = m \cdot c \cdot \Delta T = 6{,}4 \cdot 10^{-3} kg \cdot 6{,}5 J/g^\circ C \cdot (103 - 22)^\circ C = 3{,}3696 J \tag{34}$$

$$Q_2 = m \cdot l = 6{,}4 \cdot 10^{-3} kg \cdot 2500 kJ/kg = 16 kJ \tag{35}$$

$$Q_1 + Q_2 = 16003{,}4 J \approx 16 kJ \tag{36}$$

Entonces, la opción correcta es la **c**.

Pregunta 12: La temperatura final del cobre debe ser la misma que la líquido para frenos ebullido, o sea, $T_f = 103$°C. Luego, la barra de cobre deberá primero calentarse hasta dicha temperatura, y después hasta $T_f + \Delta T$. Ese ΔT será el que permita calentar el líquido para frenos hasta hacerlo ebullir. Ahora bien, la cantidad de calor que debe perder el cobre para calentar el líquido debido al 60 % de eficiencia es $\frac{16kJ}{0{,}6}$, por lo que

$$Q_{cobre} = \frac{16 kJ}{0{,}6} = m \cdot c \cdot \Delta T = 5 kg \cdot 0{,}385 kJ/kgK \cdot (x - 103)^\circ C \quad \Rightarrow \quad T = 116{,}9^\circ C \tag{37}$$

Entonces, la opción correcta es la **e**.

Problema 5: Hidrostática

Pregunta 13: Ya que el peso del sistema es el mismo, para lograr el equilibrio el volumen sumergido del sistema tiene que ser el mismo, no importa dónde pongas el equipo (pues $P = V_{sumergido} \cdot P_{esp}$, y todas las variables se mantienen sin importar la ubicación del equipo adicional). Para que el submarino esté lo más a flote posible, ya que el volumen sumergido del sistema es el volumen sumergido del equipo más el del submarino, conviene sumergir todo el equipo. Entonces, la respuesta correcta es que el equipo adicional debe estar abajo en cualquier caso, o sea, la opción **d**.

Pregunta 14: Para resolver esto hay que pedir que el peso del submarino sea mayor al empuje. Entonces,

$$P > (V + V_{globo}) \cdot (\text{peso especifico del agua}) \quad \Rightarrow \quad \cancel{g} \cdot 100000\text{Kg} > (80\text{m}^3 + V_{globo}) \cdot 1000\text{Kg/m}^3 \cdot \cancel{g} \tag{38}$$

Despejando V_{globo} y transformando esa desigualdad en una igualdad se obtiene el volumen final máximo del globo para que el sistema submarino y globo se hunda. Entonces,

$$\frac{100000\text{Kg}}{1000\text{Kg/m}^3} - 80\text{m}^3 = 20\text{m}^3 = V_{f,globo} \tag{39}$$

Para relacionar la temperatura del gas antes y después, dado que la presión se mantiene constante, se puede utilizar la Ley de Charles y Gay Lussac. Entonces,

$$T_f = V_{f,globo} \cdot \frac{T_i}{V_{i,globo}} \quad \Rightarrow \quad T_f = 20\text{m}^3 \cdot \frac{600\text{K}}{50\text{m}^3} = 240\text{K} \tag{40}$$

Luego, la opción correcta es la **a**.

Pregunta 15: Las bombas explotan a una profundidad de $20\text{m/s} \cdot 15\text{s} = 300\text{m}$. Por lo tanto la presión que deberá soportar el submarino de manera de que no lo alcancen las bombas será

$$P > \rho_{agua} \cdot g \cdot h_{\text{profundidad}} = 1000\text{kg/m}^3 \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot 300\text{m} = 3\text{MPa} \tag{41}$$

Por lo tanto, la opción correcta es la **d**.