Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Resolución de Prueba Opción Mútiple - Nivel Avanzado

Olimpiadas Metropolitanas de Física - 2014

Problema 1

Pregunta 1. Conviene resolver el ejercicio siguiendo el camino inverso al que hizo el rayo.

Primero miraremos la condición de reflexión total interna sobre la pared vertical. Allí no hay refracción, sólo reflexión. Al ángulo que cumple la condición la llamamos ϕ. Ahora, formamos un triángulo rectángulo entre el eje de simetría horizontal que pasa por el punto L y el eje de simetría vertical que pasa por el punto K. Así, el ángulo que nos falta para sumar 180 grados será el complementario de ϕ, lo llamaremos ϕ'. Por reflexión con la supeficie inferior del prisma, tendremos ϕ' del otro lado del eje de simetría. Ahora, por sumar 90 grados entre la superficie horizontal y el eje de simetría vertical, el ángulo FKD_1 será ϕ nuevamente.

Nosotros debemos encontrar un ángulo θ de incidencia para que se cumpla la reflexión total interna. En el triángulo FKD_1 , además de α tenemos el ángulo de transmisión θ_t dado por la ley de Snell, porque conocemos n.

$$\theta_t = arcsen\left(\frac{sen(\theta)}{n}\right)$$

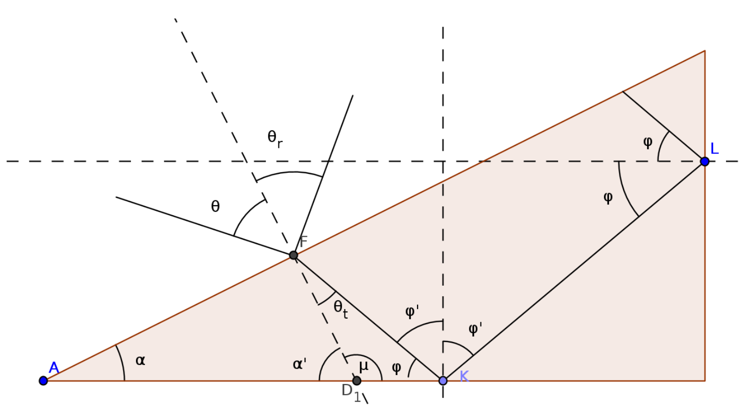
El triángulo AFD_1 es rectángulo, y a parte de α, se encuentra el ángulo complementario, α'. Marcamos ahora el ángulo μ, que sumado con α da 180 grados pero que sumado con θ_t y con ϕ también da 180 grados. De esto se concluye que

$$\theta_t + \phi = arcsen\left(\frac{sen(\theta)}{n}\right) + \phi = \alpha'$$

$$\theta = arcsen(n \cdot sen(\alpha' - \phi))$$

donde $\phi = arcsen\left(\frac{1}{n}\right)$ es el ángulo crítico a partir del cual se cumple la condición de reflexión total interna.

Para los valores n=1,5 y $\alpha = 30°$, $\underline{\theta = 27,9°}$



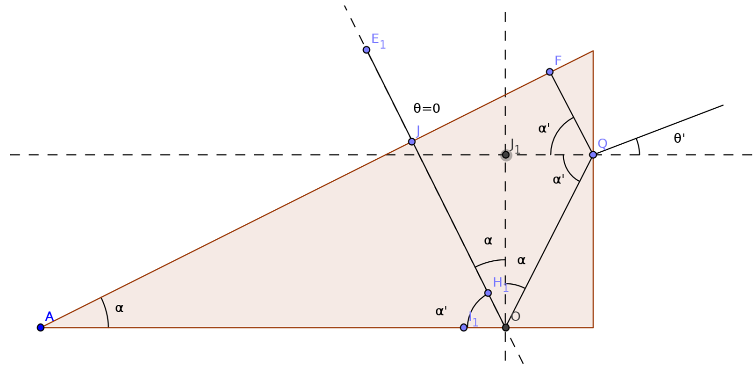
Pregunta 2. Si el ángulo θ de incidencia es cero, la parte del rayo que se refleja lo hace con el mismo ángulo, y la parte que se refracta también por Snell

$$sen(\theta) = 0 = n \cdot sen(\theta_t) \rightarrow \theta_t = 0$$

Allí se forma un ángulo recto entre la pared y el ángulo de transmisión. Si el ángulo del prisma es α, ese ángulo será el de reflexión cuando el rayo se refleje con la pared espejada (considerando un eje de simetría vertical). Ahora se forma un ángulo recto entre los ejes de simetría vertical y el horizontal dado por el punto al cual el rayo llega, de la pared vertical. Con ese triángulo rectángulo, el ángulo de reflexión es α', el complementario de α. El ángulo θ' entonces cumplirá la ley de Snell dada ahora por

$$n \cdot sen(\alpha') = sen(\theta')$$
$$\theta' = arcsen(n \cdot sen(\alpha'))$$

Para los valores $\theta = 0$, n=1,5 y $\alpha = 60°$, $\theta' = 48,6°$



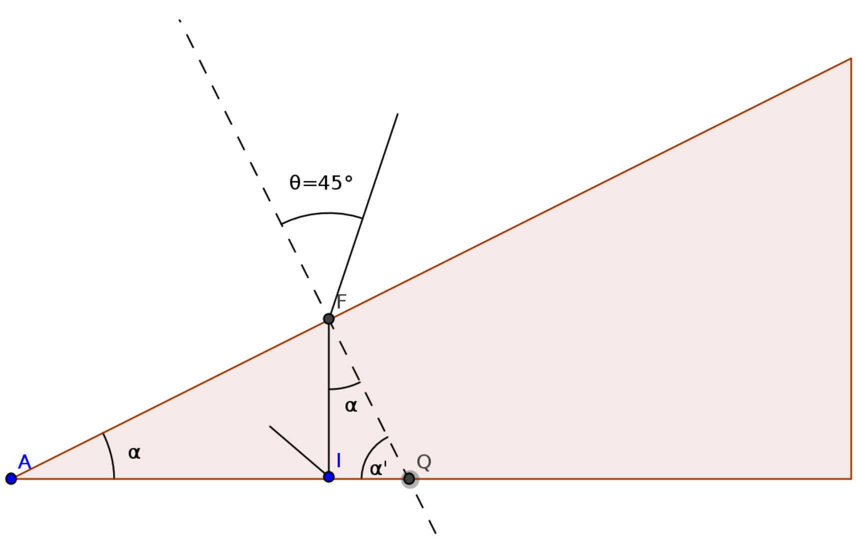
Pregunta 3. Los ángulos θ_i comprendidos entre 0 y α' (el complementario de α, es decir, 90 grados - α) describen todos, según el sistema de referencia horizontal, rayos con pendiente negativa. Los rayos entrarán en el prisma, chocarán en algún momento con la superficie espejada, y avanzarán según este sistema de referencia con pendiente positiva. Luego, al pasar por la última pared del prisma, por transmisión de luz, no podrá sino salir con pendiente positiva (salvo el caso de la reflexión total interna, en cuyo caso no se transmite nada) por lo tanto, no hay ningún θ_i para el cual el ángulo de salida sea igual.

Pregunta 4. La línea punteada marca la dirección perpendicular al lado del prisma de donde proviene el rayo. Esta línea respecto a la pared inferior del prisma marca un ángulo α' complementario a α que es el ángulo del prisma.

La condición crítica está cuando el ángulo entre el rayo refractado y la pared espejada forman un ángulo recto. En dicho caso, se forma un triángulo (en la figura, el triángulo IFQ) donde el ángulo de refracción termina siendo α. Teniendo el ángulo de refracción y el de incidencia, queda sólo n, el índice de refracción como incógnita en la ley de Snell.

$$n = \frac{sen(\theta)}{sen(\alpha)}$$

Para los valores $\alpha = 30°$ y $\theta = 45°$, n=1,41.



Problema 2

Pregunta 5. Los iones inicialmente se encuentran en reposo (ya que el enunciado nos indica que son acelerados por la presencia del campo eléctrico), es decir que su energía cinética inicial es nula. Su energía, inicialmente, está dada por la energía potencial electrostática del ion en presencia de una diferencia de potencial ΔV, es decir, $E_e = e\Delta V$. Cada ion es acelerado hasta que sale de la zona de influencia del campo (o se apaga el mismo). En el estado final toda la energía electrostática se transformó en energía cinética, de modo que debe ser:

$$e\Delta V = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}}$$

Pregunta 6. Cada ion, con velocidad v dada por el resultado de la pregunta anterior, es sometido a una fuerza debido a la presencia de un campo magnético uniforme B. La fuerza magnética que sentirá cada ion estará dada por $F_M = evB$. Como sabemos que la dirección de esta fuerza siempre es perpendicular a la dirección de la velocidad de los iones, la fuerza mangética actuará como una fuerza centrípeta debido a la que cada ion describirá una trayectoria circular. De la dinámica del movimiento circular, sabemos que (si a_c es la aceleración centrípeta):

$$F_c = ma_c = m\frac{v^2}{R}$$

donde R es el radio de la trayectoria circular. Como sabemos que la fuerza centrípeta de este movimiento es justamente la fuerza magnética, tenemos que:

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{R} &= evB \\ m\frac{v}{R} &= eB \quad \Rightarrow mv = ReB \end{aligned}$$

Como todas las magnitudes involucradas son positivas, podemos elevar al cuadrado la ecuación anterior, obteniendo $m^2v^2 = R^2e^2B^2$. Aquí podemos, o bien usar el resultado del ítem anterior para la velocidad de cada ion, o bien reordenar los términos para que aparezca la energía cinética de los iones. Hagamos esto último:

$$\frac{R^2e^2B^2}{m} = mv^2 = 2E_c = 2E_e = 2e\Delta V$$

donde hemos usado el hecho de que la energía cinética de cada ion es igual a la energía electrostática que adquirió cuando se le aplicó la diferencia de potencial ΔV. Ya nos falta poco. Ahora es momento de recordar que teníamos dos tipos diferentes de iones, los dos con la misma carga e, pero unos de carbono con masa m_C, y unos desconocidos con masa m_X, que es la que queremos averiguar. Como los dos tipos de iones fueron sometidos al mismo campo magnético y a la misma diferencia de potencial, lo unico que cambia para cada uno, además de la masa, es el radio de la trayectoria circular, que llamaremos R_C y R_X. Entonces:

$$\begin{aligned} R_C^2e^2B^2 &= m_C 2e\Delta V \\ R_X^2e^2B^2 &= m_X 2e\Delta V \end{aligned}$$

Ahora podemos dividir las ecuaciones anteriores entre sí, y tenemos:

$$\frac{R_X^2}{R_C^2} = \frac{m_X}{m_C} \quad \Rightarrow \quad m_X = \frac{m_C R_X^2}{R_C^2} = \frac{12\text{uma} \cdot (10,4cm)^2}{(9cm)^2} \approx \underline{16\text{uma}}$$

que corresponde a un ion de oxígeno.

Problema 3

Pregunta 7. La densidad del gas es:

$$\rho = \frac{m}{V}\ , \tag{0.1}$$

donde m es la masa y V el volumen del gas. Con la ecuación de estado del gas ideal,

$$PV = nRT\ , \tag{0.2}$$

donde P es la presión, n la cantidad de sustancia en moles, R la constante de los gases y T la temperatura, se puede despejar la densidad ρ en función de la temperatura. Primero hay que considerar la masa m del gas como:

$$m = nM \;\Rightarrow\; n = \frac{m}{M} \tag{0.3}$$

donde M es la masa molar (dato) que indica la masa por unidad de moles en la sustancia. Introduciendo este valor de n en la ecuación del gas ideal y despejando de la siguiente manera:

$$PV = \frac{mRT}{M} \Rightarrow \frac{PM}{RT} = \frac{m}{V} = \rho \tag{0.4}$$

se llega al resultado deseado completando los datos: $P = 0,9atm$, $M = 28,85g/mol$ y $R = 0,083atml/(molK)$, obteniendo:

$$\rho(T) \cong \frac{313}{T}(gK/l) \tag{0.5}$$

Pregunta 8. Aquí hay que plantear la segunda Ley de Newton con aceleración nula para satisfacer la condición de equilibrio. Las fuerzas actuantes sobre el dirigible con su peso $P_{m_0} = m_0 g$ debido a la gravedad (aceleración igual a g), el peso del aire caliente en su interior $P_c = \rho(T)Vg$ y la fuerza de empuje que ejerce el fluido exterior (el aire frío de la atmósfera) derivado del principio de Arquímedes. Mientras que los pesos tienen dirección vertical y descendente, el empuje es una fuerza vertical y ascendente. Como el aire de la atmósfera también se considera un gas ideal, sabemos que su densidad se puede obtener en función de la temperatura tal como se planteó para la pregunta 1 ya que las presiones son iguales en el interior y exterior del dirigible:

$$\rho_{ext}(T_{ext}) \cong \frac{313}{T_{exterior}}(gK/l)\,. \tag{0.6}$$

Teniendo en cuenta que la fuerza de empuje F_e se calula como el peso del volumen de fluido desplazado (en este caso aire frío del exterior), obtenemos que:

$$F_e = \rho_{ext}(T_{ext} = 293K)Vg \tag{0.7}$$

donde hemos evaluado la función $\rho_{ext}(T_{ext})$ en $T_{ext} = 293K$ que corresponde a los 20^oC del aire frío, V es el volumen del aire desplazado que es equivalente al volumen del dirigible (una esfera de $V = 4\pi R^3/3$) y g es la aceleración de la gravedad. Finalmente planteando la segunda Ley de Newton con aceleración nula se obtiene:

$$\rho_{ext}(293K)Vg - \rho(T)Vg - m_0 g = 0\,. \tag{0.8}$$

Reemplazando la función $\rho(T)$ de la pregunta 1 y el volumen de la esfera $V = 4\pi R^3/3 = 4189m^3$ se puede despejar la temperatura del interior a partir de la última ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{gathered} m_0 = V(\rho_{ext}(293K) - \rho(T)) \Rightarrow \rho_{ext}(293K) - \frac{m_0}{V} = \rho(T) \\ \frac{313}{T}(gK/l) = \frac{313}{293}(g/l) - \frac{m_0}{V} \Rightarrow \frac{1}{T}(K) = \frac{1}{293} - \frac{1000kg}{4189m^3}\frac{1}{313}(10^{-3}m^3/(10^{-3}kg)) \\ \Rightarrow \frac{K}{T} = 0,00265 \Rightarrow \underline{T = 377K} \end{gathered} \tag{0.9}$$

Pregunta 9. Teniendo en cuenta que no se ejerce trabajo sobre el dirigible ($W = 0$), la primera ley de de la termodinámica postula:

$$Q = \Delta U + W = \Delta U\,. \tag{0.10}$$

Es decir que toda la pérdida de energía durante las 24hs deberá ser compensado por el calor que entreguen los maestros fuego. El ritmo de pérdida de energía (potencia disipada) es 200(kJ/hora). Para garantizar el vuelo se necesitará que los maestros fuego compensen la perdida entregando una potencia equivalente, como cada uno puede entregar 50(kJ/hora), entonces se precisará tener un equipo de $\frac{200(kJ/hora)}{50(kJ/hora)} = 4$ maestros trabajando al menos todo el tiempo. Pero como no pueden trabajar mas de 4 horas en un día, habrá que rotar el equipo $\frac{24(horas)}{4horas} = 6$ veces por día. Por lo tanto será necesario tener $6 \times 4 = 24$ maestros fuego abordo mínimamente.

Problema 4

Pregunta 10. La condición de equilibrio implica que la aceleración de la esfera sea nula. Planteando la segunda Ley de Newton junto a la condición de equilibrio,

$$\sum \overrightarrow{F} = M\overrightarrow{a} = 0\,, \tag{0.11}$$

se deduce que la suma de todas las fuerzas sobre la esfera debe ser nula. Existen 2 tipos de fuerzas actuando sobre la esfera; la fuerza peso por la gravedad (de magnitud Mg, vertical y descendente) y la fuerza de empuje (vertical y ascendente) que los fluidos ejercen para sostenerlo. Según el principio de Arquímedes, la fuerza de empuje sobre un cuerpo sumergido total o parcialmente en un fluido es igual a la densidad del fluido multiplicado por el volumen de fluido desplazado (al sumergir el cuerpo) multiplicado por la aceleración de la gravedad. En este caso la fuerza de empuje se divide en dos partes ya que el cuerpo está parcialmente sumergido en el líquido 1 y parcialmente en el líquido 2. En definitiva la fuerza de empuje, F_e, es:

$$F_e = V_1\rho_1 g + V_2\rho_2 g \tag{0.12}$$

hacia arriba. Mientras que la fuerza peso en función de la densidad de la esfera es:

$$F_g = V_{esfera}\ \rho_s g = (V_1 + V_2)\rho_s g \tag{0.13}$$

hacia abajo. Por lo tanto, introduciendo estas fuerzas en la ecuación de Newton y utilizando el dato de la pregunta que indica que $2V_1 = V_2$ se obtiene:

$$F_e - F_g = V_1\rho_1 g + 2V_1\rho_2 g - 3V_1\rho_s g = 0 \Rightarrow \rho_s = \frac{\rho_1 + 2\rho_2}{3\rho_s} \tag{0.14}$$

Pregunta 11. Aumenta sólo ρ_1 mientras que ρ_2 y ρ_s permanecen como antes. El volumen de la esfera V también permanece fijo y lo que podría modificarse son los volúmenes parciales V_1 y V_2 según para dónde se mueva la esfera. Para decidir qué es lo que pasará será conveniente observar cómo se modifican las fuerzas inmediatamente después de aumentar ρ_1 y partiendo de la situación de equilibrio anterior. Es directo ver que la fuerza peso no se modifica. La fuerza de empuje en el equilibrio se podía escribir como:

$$F_e = V_1\rho_1 g + V_2\rho_2 g\ = (V_1(\rho_1 - \rho_2) + V\rho_2)g\ , \tag{0.15}$$

donde se usó en el último paso que $V_2 = V - V_1$. De la última expresión para F_e se puede ver que si g, V, ρ_2 y ρ_s son constantes, inmediatamente después de aumentar ρ_1 (cuando aún V_1 no se ha modificado) la fuerza de empuje crece y como es vertical y ascendente se deduce que <u>la esfera sube respecto a la interfaz.</u>

Pregunta 12. El principio fundamental de la hidrostática dice que la diferencia de presión ΔP entre dos puntos en un fluido con densidad uniforme ρ es igual a $\rho g h$, dónde h es la diferencia de alturas entre los puntos en el fluido. Por lo tanto dos puntos a la misma altura dentro de un fluido tienen la misma presión. La presión sobre la superficie en una cara del cilindro es la que ejerce el fluido que está en contacto con dicha superficie. Como las caras del cilindro se encuentran paralelas a la interfaz y perpendiculares a la vertical, cada cara del cilindro se encuentra a una misma altura dentro de cada fluido. Esto quiere decir que la presión sobre toda la cara superior es uniforme e igual a la presión que hay en el fluido 1 a esa altura ($H/4$ por encima de la interfaz). Mientras que algo similar ocurre con la cara inferior, ya en el fluido 2 ($3H/4$ por debajo de la interfaz). Teniendo todo esto en cuenta, ahora necesito calcular $\Delta P = P_a - P_b$, la diferencia de presión entre un punto a ubicado $3H/4$ por debajo de la interfaz (en el líquido 2) y otro punto b ubicado $H/4$ por encima de la interfaz (en el líquido 1). Sea P_0 la presión en la interfaz, entonces por el principio fundamental de la hidrostática puedo decir que:

$$P_a - P_0 = \rho_2 g\frac{3H}{4}\ \text{y} \tag{0.16}$$

$$P_0 - P_b = \rho_1 g\frac{H}{4}\,. \tag{0.17}$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$$\Delta P = gH(\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}) \tag{0.18}$$

Problema 5

Pregunta 13. El dardo describe una trayectoria de tiro oblicuo. Su posición a tiempo t estará determinada por las siguientes ecuaciones horarias:

$$\begin{aligned} x_d(t) =& v_0 \cos\theta \, t \\ y_d(t) =& v_0 \sin\theta \, t - gt^2/2 \end{aligned}$$

, donde v_0 es la rapidez inicial del dardo, y θ es el ángulo que forma el rifle con la horizontal. Como el mono se suelta desde una rama sin velocidad inicial, describirá una trayectoria rectilínea en el eje y, y su posición horizontal estará siempre dada por $x_m(t) = d$. Entonces, el dardo cruzará la trayectoria del mono en el tiempo t en que $x_d(t) = d$:

$$v_0 \cos\theta \, t = d \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{v_0 \cos\theta}$$

Pregunta 14. El mono, como ya mencionamos, experimenta un movimiento rectilíneo uniformemente variado.. Como sabemos que el cazador le apunta al mono cuando dispara, la altura inicial del mono debe estar dada por $h = d \tan\theta$, de modo que su posición a tiempo t será:

$$y_m(t) = d \tan\theta - \frac{g}{2} t^2$$

Cuando el dardo atraviesa su vertical, la altura a la que se encuentra el mono es:

$$y_m = d \tan\theta - \frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}$$

donde hemos usado el tiempo encontrado en la pregunta anterior. Ahora, para ver si el mono se salva o no se salva, debemos ver cuál es la posición del dardo a ese tiempo. Reemplazando en la ecuación para $y_d(t)$ de la pregunta anterior el tiempo en el que el dardo atraviesa la trayectoria del mono, vemos que el dardo estará en la posición:

$$y_d = v_0 \sin\theta \, \frac{d}{v_0 \cos\theta} - \frac{g}{2} \left(\frac{d}{v_0 \cos\theta} \right)^2 = d \tan\theta - \frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}$$

de donde se ve que y_d e y_m coinciden, y el mono no se salva.

Pregunta 15. La energía mecánica total del mono se conserva, pues no actúan sobre él fuerzas no conservativas. Su energía inicial viene dada por la energía potencial gravitatoria, siendo $E_0 = mgh = mgd \tan\theta$, si ponemos el cero de energía potencial en el nivel del rifle. Cuando llega al suelo, toda la energía del mono viene dada por su energía cinética, $E_f = mv^2/2$. Como la energía inicial debe ser igual a la final, podemos cancelar la masa del mono y despejar la velocidad con la que llega al piso:

$$v = \sqrt{2gd \tan\theta}$$