

**Relajación de espín en semiconductores III–V por mecanismo  
de Elliot–Yafet vía interacción de Coulomb**

**Marcelo Alejandro Kuroda**

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

Noviembre de 2002

**TEMA:** Relajación de espín en semiconductores III–V por mecanismo de Elliot–Yafet  
vía interacción de Coulomb

**ALUMNO:** Marcelo Alejandro Kuroda            L.U. 120/96

**LUGAR DE TRABAJO:** Depto. de Física. - F.C.E.N. - U.B.A.

**DIRECTOR DEL TRABAJO:** Dr. Pablo I. Tamborenea.

**FECHA DE INICIACION:** Diciembre de 2001

**FECHA DE FINALIZACION:** Noviembre de 2002

**FECHA DE EXAMEN:** ??/??/02

**INFORME FINAL APROBADO POR:**

\_\_\_\_\_  
Dr. Pablo I. Tamborenea

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Profesor de Seminario

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

# Indice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Cálculo del tiempo de relajación</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Resultados en GaAs</b>	<b>18</b>
<b>4</b>	<b>Comparación con InAs y InSb</b>	<b>28</b>
<b>5</b>	<b>Análisis de Resultados</b>	<b>33</b>
5.1	Análisis de la dependencia con la temperatura . . . . .	33
5.2	Comparación con el experimento . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Apéndices</b>	<b>39</b>
6.1	Cálculo de elementos de matriz . . . . .	39
6.2	Cálculo del tiempo de relajación . . . . .	41

# Capítulo 1

## Introducción

Los semiconductores son los materiales apropiados para la construcción de dispositivos electrónicos debido a que su distribución de carga puede ser manipulada permitiendo la creación de compuertas lógicas. El aumento de las velocidades de respuesta y transmisión de información de dichos dispositivos arrastra a la industria al diseño y construcción de dispositivos cada vez más pequeños. Esta reducción de tamaño pronto se encontrará con la “complicación” de los efectos cuánticos, cuyo comportamiento estadístico introduce fluctuaciones aleatorias que pueden afectar el funcionamiento de los mencionados sistemas. Llevados a considerar métodos alternativos para contemplar dicho comportamiento cuántico, los científicos están investigando la posibilidad de desarrollar dispositivos que aprovechen los efectos cuánticos. Esto ha formado una rama de la tecnología electrónica, conocida como espíntrónica, donde los dispositivos electrónicos están basados en el espín de los electrones, en lugar de su carga. A partir de esta motivación se ha vuelto a despertar el interés en el estudio de los tiempos característicos de relajación de la magnetización electrónica en estructuras construídas con semiconductores, cuyas dimensiones características son de decenas de nanómetros. En éstas sería esencial preservar la polarización del espín de los portadores por tiempos lo más largos posibles, y por ello se hace necesario desarrollar modelos teóricos que permitan calcular dicho tiempo de vida

de espín en diferentes estructuras. Sistemas como pozos cuánticos y puntos cuánticos fabricados con materiales semiconductores del tipo III-V, como el arsenuro de galio (GaAs) y el arsenuro de galio con aluminio (AlGaAs) han sido fundamentales en el estudio experimental y teórico de la física de sistemas electrónicos de dimensionalidad reducida. Además de haber permitido la creación numerosos dispositivos prácticos, estos sistemas de aleaciones semiconductoras han conducido al descubrimiento del efecto Hall cuántico, que ha sido motivo de una intensa actividad científica y dos premios Nobel.

Uno de los descubrimientos más interesantes recientemente realizados sobre estas estructuras es que la presencia de un gas de electrones de baja densidad donado al material extiende unos tres órdenes de magnitud el tiempo de dephasing de espín [1]. El tiempo de desfasaje es el tiempo de decaimiento de la magnetización que resulta de la combinación de la decoherencia por colisiones de los electrones individuales con el desfasaje colectivo debido al ensanchamiento inhomogéneo de los niveles de energía magnéticos de los diferentes electrones. El presente trabajo se encuentra motivado, precisamente, por una reciente serie de experimentos realizados por Awschalom y colaboradores [1, 2, 3, 4, 5] donde este fenómeno ha sido observado tanto en sistemas en volumen como en pozos y puntos cuánticos. Dicho grupo estudió la dinámica del gas de electrones foto-excitado en GaAs dopado negativamente. Al incidir pulsos ultracortos de luz circularmente polarizada sobre un semiconductor, con energías por encima del gap de energía entre las bandas de valencia y conducción se promueven electrones de las primeras de las bandas a las segundas. La incidencia con dichos pulsos acopla, de acuerdo a las reglas de selección óptica, fotones con cierta polarización circular a electrones con una de las orientaciones de espín, dejando huecos en las bandas de valencia. Controlando la polarización de láseres ultra-rápidos, es posible excitar un gas de electrones con una polarización inicial específica. Una vez creada tal polarización en el gas de electrones, es debido a las interacciones que se pierde la coherencia entre estados. Para poder medir la magnetización del ensamble de

espín se aplica un campo magnético perpendicular a la dirección de propagación de la luz y, empleando un segundo pulso láser, se determina la magnetización luego de comenzada la precesión de espines. La polarización de este pulso es lineal y rota un ángulo proporcional a la magnetización. Esta técnica, conocida como rotación de Faraday, permite determinar la evolución de la magnetización al variar el retraso entre los pulsos aplicados.

En GaAs no dopado, el tiempo de relajación de espín es del orden de 100ps debido principalmente, al eficiente mecanismo de *electron-hole exchange* propuesto por Bir-Aronov-Pikus (1975) [6]. Cualitativamente podemos decir que, al haber electrones donados al sistema, éstos se combinan con los huecos excitados formando antes de que los huecos puedan interactuar con los electrones polarizados en espín. Por lo tanto, luego de ser absorbidos, los huecos no pueden destruir la coherencia de espín. recombinarse con los electrones excitados. Es entonces que para describir la evolución de este gas hasta el momento se han propuesto tres mecanismos fundamentales que producen la pérdida de coherencia del ensamble, los cuales, para ciertos regímenes, han sido parcialmente confirmados experimentalmente. El primero de ellos se conoce como Elliot-Yafet (1954) [8] y es debido a que las funciones de Bloch que describen las autofunciones no son autoestados de spin sino superposición de ellas. Esto da lugar a que pueda producirse la inversión de espín pese a que la interacción en cuestión se independiente del espín. Otro de los mecanismos es el conocido como D'yakonov-Perel' (1970) [9] y está relacionado con la remoción de la degeneración de la banda de conducción para  $\vec{k} \neq 0$  debido a la ausencia de simetría de inversión. Y, por último, el mecanismo de Bir-Aronov-Pikus anteriormente descrito debido a la aniquilación de pares electrón-hueco. Para calcular los tiempos de relajación de cada uno de estos mecanismos, deben considerarse las contribuciones debidas a diferentes vías de scattering, como por ejemplo el scattering electrón-electrón, scattering con impurezas, scattering con impurezas ionizadas, scattering con fonones, etc. [10].

Si bien los cálculos de los tiempos de relajación de espín fueron iniciados a media-

dos del siglo pasado, fue el gran avance registrado recientemente en el área experimental, gracias al uso de óptica ultra-rápida y el crecimiento de cristales por molecular beam-epitaxy, que actualmente ha resurgido el interés científico por el tema. De todas formas, hasta el momento, el avance experimental no ha sido acompañado por un progreso teórico comparable y aun no existe una descripción teórica satisfactoria de estos experimentos. Los tratados teóricos clásicos de Overhauser (1953) [7], Elliot-Yafet, D'yakonov-Perel' y Bir-Aronov-Pikus fueron seguidos por escasos y algo aislados trabajos teóricos que no contemplan las condiciones experimentales actuales.

El objetivo del presente trabajo consiste en contribuir con el modelaje teórico microscópico que describa la evolución temporal de un gas de electrones creado por pulsos cortos de luz en semiconductores, para identificar los mecanismos relevantes en la pérdida de coherencia de espín. La teoría empleada para el cálculo de los tiempos de relajación de la magnetización electrónica en arsenuro de galio (GaAs) dopado negativamente es debida al mecanismo de Elliot-Yafet a través del scattering electrón-electrón por interacción coulombiana en la aproximación de Born en ausencia de campos magnéticos externos. Este estudio es efectuado en tiempos posteriores a la etapa inicial de polarización del gas, donde del proceso de relajación donde es predominante el scattering electrón-hueco. Si bien se toma como punto de partida el cálculo realizado por Boguslawski [11], que data de 1980, para la realización del cálculo, existen notables diferencias entre lo realizado en este trabajo respecto al de Boguslawski. Por un lado, Boguslawski aproxima las funciones de distribución de los electrones por distribuciones de Maxwell-Boltzmann, mientras que en este trabajo se emplean distribuciones de Fermi-Dirac para describir en forma exacta ambas poblaciones de espín. De esta forma, los resultados obtenidos en el trabajo de Boguslawski quedan fuera del rango de validez de las experiencias citadas que se intentan describir, ya que las mismas son a temperaturas en un rango entre 5K y 100K, aproximadamente. Por otro lado se realiza un estudio de la dependencia de dicho tiempo con la

variación de parámetros como la densidad de electrones cedidos, la densidad de electrones fotoexcitados y la temperatura.

En el Capítulo 2 se presenta la teoría desarrollada para el cálculo de los tiempos de relajación de la magnetización electrónica en semiconductores tipo III-V por el mecanismo anteriormente citado. En el capítulo 3 se presentan los resultados obtenidos para el GaAs variar parámetros como el dopaje, la densidad de electrones excitados y la temperatura. Además se realiza un breve estudio de la relajación de espín a temperatura cero. Por otro lado, en el Capítulo 4 se comparan los resultados obtenidos por el mismo mecanismo en otros dos semiconductores del tipo III-V, el arsenuro de indio (InAs) y el antimonuro de indio (InSb), ambos dopados negativamente. En el capítulo 5 se analizan aspectos varios de los resultados presentados en los dos capítulos anteriores, y finalmente se formulan las conclusiones del trabajo.

## Capítulo 2

# Cálculo del tiempo de relajación

El cálculo del tiempo de relajación  $T_1$  causado por el mecanismo de scattering Elliot-Yafet debido a la interacción de coulombiana electrón-electrón toma como punto de partida un sistema donde a un gas de electrones de densidad  $n$  donados al semiconductor y sin polarización, se le agrega una densidad de electrones foto-excitados  $n_{ex}$  ocupando estados con polarización definida. Al estudiar el sistema luego de haberse producido la recombinación de huecos y electrones, se asume ambas poblaciones de espín pueden ser descritas por distribuciones de Fermi-Dirac con temperaturas común  $T$ . Si bien el potencial de interacción de Coulomb es independiente del espín, la posibilidad de que se produzcan inversiones en el espín radica en que las funciones de onda que describen a los electrones en la banda de conducción no son autoestados de espín sino que corresponden a una mezcla de ellos. En un semiconductor, donde la degeneración de las bandas de conducción se remueve debido a la interacción espín-órbita, los estados de electrones en la banda de conducción pueden describirse empleando el modelo de bandas de tres niveles de Kane [12]. Si  $E_F \ll E_g$ , donde  $E_F$  es la energía de Fermi del gas de electrones en la banda de conducción y  $E_g$  es el gap de energía entre las bandas de valencia y conducción del semiconductor, se obtienen como resultado las funciones de onda de Bloch

para electrones en la banda de conducción descriptas por

$$|\vec{k}, \sigma\rangle = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} |u_{\vec{k}, \sigma}\rangle \quad (2.1)$$

donde

$$|u_{\vec{k}, \sigma}\rangle = |s, \sigma\rangle + i \left( \frac{E_F}{E_g} \frac{3E_g + 2\Delta}{3(E_g + 2\Delta)} \right)^{1/2} \left[ \frac{\vec{k} \cdot |\vec{R}, \sigma\rangle}{k_F} + \frac{i2\Delta}{(2\Delta + 3E_g)} \frac{\vec{S} \cdot (\vec{k} \times |\vec{R}, \sigma\rangle)}{\hbar k_F} \right] \quad (2.2)$$

siendo  $k_F$  el vector de onda asociado a la energía de Fermi y  $\Delta$  la separación de las bandas de valencia debida al acoplamiento espín-órbita. Como podemos observar las funciones no son autoestados de espín  $S_z$  debido a la presencia del término  $\vec{S} \cdot (\vec{k} \times |\vec{R}, \sigma\rangle)$ , el cual mezcla estados de espín. En el “borde” de la banda de conducción ( $k \ll k_F$ ), las autofunciones de los electrones poseen prácticamente la simetría de los orbitales  $|s\rangle$ , pero en cuanto se alejan del borde comienzan a aparecer componentes importantes del tipo  $|p\rangle$  de espín opuesto debidas al acoplamiento  $\vec{k} \cdot \vec{p}$  con las bandas de valencia y a la interacción espín-órbita. Por convención, se las rotula con el espín del primer término de la función de onda, correspondiente al orbital  $|s, \sigma\rangle$ . Una observación importante es que si bien el autoestado tiene una componente predominante de espín, es la mezcla de estados de espín en las autofunciones electrónicas, la que permite que se produzca la relajación de espín por medio del scattering electrón-electrón, en la cual no se acoplan autoestados de espín.

Supongamos que se tiene un semiconductor con un dopaje negativo  $n$ , en el cual se ha fotoexcitado además una densidad de electrones  $n_{ex}$  polarizándolos en espín y obteniendo, por ende, se una magnetización electrónica no nula. Entonces,  $n_{ex}$  también es la diferencia entre las densidades electrónicas con espín  $+$  ( $n_+$ ) y espín  $-$  ( $n_-$ ), respectivamente. Definimos entonces el tiempo de relajación de electrones  $T_1$  como la tasa temporal con que varía la densidad de electrones polarizados, es decir,

$$\frac{1}{T_1} = -\frac{1}{n_{ex}} \frac{dn_{ex}}{dt} \quad (2.3)$$

Empleando la hipótesis de que ha transcurrido el tiempo suficiente como para ya no haya recombinación electrón-hueco, la densidad de electrones en la banda de conducción se mantiene constante ( $n_+(t) + n_-(t) = n + n_{ex}$ ), se tiene que:

$$\frac{1}{T_1} = -\frac{2}{n_{ex}} \frac{dn_+}{dt} \quad (2.4)$$

El trabajo consistirá, por lo tanto, en calcular  $\frac{dn_+}{dt}$  a partir del scattering de dos electrones considerando la interacción coulombiana entre ellos. Para esto, tendremos en cuenta las contribuciones donde sólo uno de los dos electrones que interactúan invierte su espín. No consideraremos el caso en que ambos electrones invierten su espín, puesto que, como se verá luego, en la mayoría de los semiconductores dicha probabilidad es mucho menor. Para calcular la probabilidad de que una inversión tenga lugar, tendremos que considerar los dos posibles canales de scattering: el directo y el de intercambio. La figura 2.1 muestra los esquemas de los diferentes canales. En el scattering de electrones vía interacción coulombiana, donde éstos son considerados partículas libres, debe conservarse la energía cinética total y el momento total del sistema. Por conveniencia se ha elegido como momentos iniciales  $\vec{k}$  y  $\vec{k}'$  y finales  $\vec{k} + \vec{q}$  y  $\vec{k}' - \vec{q}$ . De esta manera, al quedar sólo como variable libre  $\vec{q}$  siempre se ha de conservar el impulso total.

En la figura 2.1 se muestran los cuatro posibles canales por los que se producen inversiones de espín. En dos de ellos (directo e intercambio), uno de los electrones pasa de polarización + a -, mientras que el otro mantiene su polarización y en los otros dos canales, la polarización de uno pasa de - a + y al tiempo que el otro mantiene la propia. De acuerdo a estos diagramas,

$$\begin{aligned} \frac{dn_+}{dt} = \sum_{\substack{\vec{k} \vec{k}' \\ \vec{q} \sigma}} \left\{ f_-(\vec{k}) f_\sigma(\vec{k}') \left[ 1 - f_+(\vec{k} + \vec{q}) \right] \left[ 1 - f_\sigma(\vec{k}' - \vec{q}) \right] T_{\vec{k}^-; \vec{k}' \sigma \rightarrow \vec{k} + \vec{q}^+; \vec{k}' - \vec{q} \sigma^-} \right. \\ \left. - f_+(\vec{k}) f_\sigma(\vec{k}') \left[ 1 - f_-(\vec{k} + \vec{q}) \right] \left[ 1 - f_\sigma(\vec{k}' - \vec{q}) \right] T_{\vec{k}^+; \vec{k}' \sigma \rightarrow \vec{k} + \vec{q}^-; \vec{k}' - \vec{q} \sigma} \right\} \quad (2.5) \end{aligned}$$

siendo  $f_\sigma(k)$  las distribuciones de Fermi-Dirac para la población de electrones con polarización  $\sigma$  y  $T_{\vec{k}_1^\pm; \vec{k}_1^\pm \sigma \rightarrow \vec{k}_2^\pm; \vec{k}_2^\pm \sigma}$  la probabilidad de transición asociada a los canales.

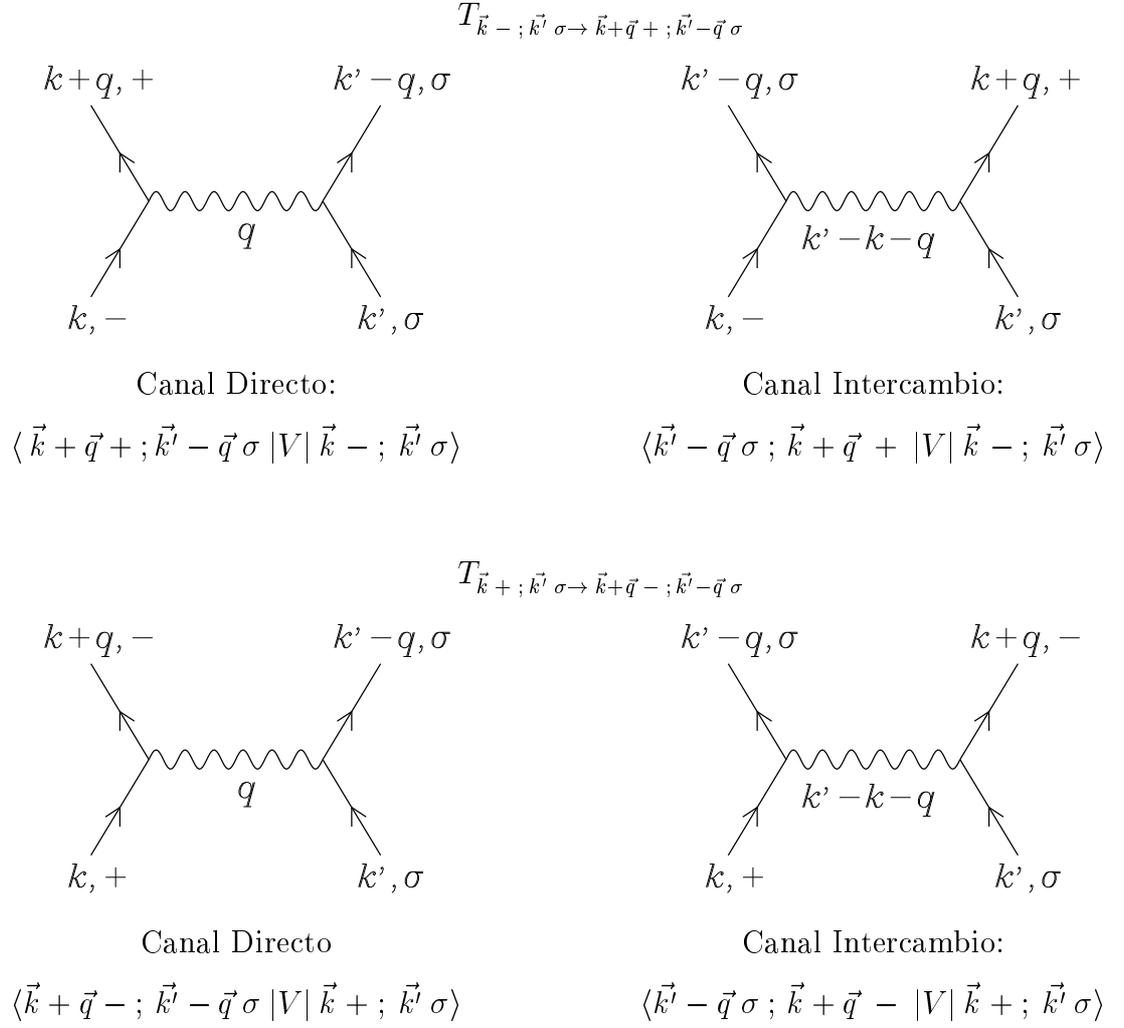


Figura 2.1: Canales de scattering electrón-electrón.

Teniendo en cuenta el término de intercambio dicha probabilidad la escribiremos, de acuerdo a la regla de Oro de Fermi, como:

$$T_{\vec{k},-; \vec{k}',\sigma \rightarrow \vec{k}+\vec{q},+; \vec{k}'-\vec{q},\sigma} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) \cdot \left| \langle \vec{k}+\vec{q},+; \vec{k}'-\vec{q},\sigma | V | \vec{k},-; \vec{k}',\sigma \rangle - \langle \vec{k}'-\vec{q},\sigma; \vec{k}+\vec{q},+ | V | \vec{k},-; \vec{k}',\sigma \rangle \right|^2 \quad (2.6)$$

Desarrollando los términos dentro del módulo de la ecuación anterior tenemos:

$$\begin{aligned} & \left| \langle \vec{k}+\vec{q},+; \vec{k}'-\vec{q},\sigma | V | \vec{k},-; \vec{k}',\sigma \rangle - \langle \vec{k}'-\vec{q},\sigma; \vec{k}+\vec{q},+ | V | \vec{k},-; \vec{k}',\sigma \rangle \right|^2 = \\ & = \left| \langle \vec{k}+\vec{q},+; \vec{k}'-\vec{q},\sigma | V | \vec{k},-; \vec{k}',\sigma \rangle \right|^2 + \left| \langle \vec{k}'-\vec{q},\sigma; \vec{k}+\vec{q},+ | V | \vec{k},-; \vec{k}',\sigma \rangle \right|^2 - \\ & \quad - 2\text{Re} \left[ \langle \vec{k}+\vec{q},+; \vec{k}'-\vec{q},\sigma | V | \vec{k},-; \vec{k}',\sigma \rangle \langle \vec{k}'-\vec{q},\sigma; \vec{k}+\vec{q},+ | V | \vec{k},-; \vec{k}',\sigma \rangle \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

En la ecuación (2.7) podemos identificar las contribuciones debidas a los términos directo, de intercambio y de interferencia, respectivamente. Veamos ahora que sucede con cada uno de estos términos.

Al calcular los elementos de matriz, teniendo en cuenta que el potencial de interacción  $V(r)$  varía lentamente en la escala de la celda unidad, y usando que los autoestados  $|u_{\vec{k}\sigma}\rangle$  tienen la periodicidad de la red, el elemento de matriz correspondiente al término directo de la ecuación (2.7) puede factorizarse en:

$$\langle \vec{k}+\vec{q},+; \vec{k}'-\vec{q},\sigma | V | \vec{k},-; \vec{k}',\sigma \rangle \approx V_{\vec{q}} \langle u_{\vec{k}+\vec{q},+} | u_{\vec{k},-} \rangle \langle u_{\vec{k}'-\vec{q},\sigma} | u_{\vec{k}',\sigma} \rangle \quad (2.8)$$

donde  $V_{\vec{q}}$  es la transformada de Fourier del potencial. Resta entonces, calcular los coeficientes de acoplamiento de electrones en la banda de conducción.

Es fácil ver que si ambos electrones tienen espín paralelos, el acoplamiento entre sus funciones de onda resulta:

$$\langle u_{\vec{k},\sigma} | u_{\vec{k}+\vec{q},\sigma} \rangle \cong 1 \quad (2.9)$$

En cambio, si los electrones tienen espín opuesto, se obtiene que (ver cálculo detallado en el Apéndice 6.1):

$$\langle u_{\vec{k}+\vec{q},+} | u_{\vec{k},-} \rangle = \frac{E_F \Delta (2E_g + \Delta)}{E_g (\Delta + E_g)(2\Delta + 3E_g)} \frac{q_- k_z - q_z k_-}{k_F^2} \quad (2.10)$$

donde se han elegido los autoestados de espín sobre el eje  $\vec{z}$ .

En nuestro caso, el potencial de interacción corresponde al potencial de Coulomb apantallado:

$$V(r) = e^{-k_s r} / r \quad (2.11)$$

siendo  $k_s$  la inversa del radio de apantallamiento. De acuerdo a la teoría de Debye-Hückel, en el caso de distribuciones de Fermi-Dirac, se obtiene que

$$k_s^2 = 3n/2\epsilon E_F \quad (2.12)$$

Aplicando la transformada de Fourier del potencial de la ecuacion (2.11) resulta:

$$V_{\vec{q}} = \frac{1}{V} \iiint e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) d^3r \Rightarrow V_{\vec{q}} = \frac{4\pi e^2}{\epsilon V} \frac{1}{q^2 + k_s^2} \quad (2.13)$$

Empleando los resultados obtenidos en las ecuaciones (2.8), (2.9), (2.10) y (2.13), obtenemos que:

$$\langle \vec{k} + \vec{q} + ; \vec{k}' - \vec{q} \sigma | V | \vec{k} - ; \vec{k}' \sigma \rangle \approx V_{\vec{q}} \frac{E_F}{E_g} \frac{\Delta (2E_g + \Delta)}{(\Delta + E_g)(2\Delta + 3E_g)} \frac{k_- q_z - k_z q_-}{k_F^2} \quad (2.14)$$

donde  $k_{\pm} = k_x \pm i k_y$ .

Aquí se puede ver que si  $E_F \ll E_g$ , la probabilidad de que se produzca la inversión del espín de uno de los electrones es pequeña con lo cual, la probabilidad de que se invierta el espín en dos electrones luego de la interacción resulta prácticamente despreciable.

En la expresión (2.6), la expresión  $\delta(E_f - E_i)$  corresponde a la conservación de la energía cinética de los electrones durante el scattering. Al considerarlos como electrones libres de masa efectiva  $m^*$ , la conservación de la energía resulta:

$$E_f - E_i = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ (\vec{k} + \vec{q})^2 + (\vec{k}' - \vec{q})^2 - k^2 - k'^2 \right] = \frac{\hbar^2}{m^*} \vec{q} \cdot (\vec{k} - \vec{k}' + \vec{q}) = 0 \quad (2.15)$$

por lo tanto, para que se conserve la energía,

$$\vec{q} \cdot \vec{q} = (\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{q} \quad (2.16)$$

Del resultado de la ecuación (2.16) se puede deducir que dados los dos impulsos iniciales,  $\vec{k}$  y  $\vec{k}'$  los posibles vectores de onda  $\vec{q}$  intercambiados en el scattering, se encuentran en el lugar geométrico descrito por un casquete esférico, centrado en el origen, de diámetro  $|\vec{k}' - \vec{k}|$  como se muestra en la figura 2.2. Por esta razón, podemos determinar que:

$$\left| |\vec{k}| - |\vec{k}'| \right| \leq |\vec{q}| \leq |\vec{k}| + |\vec{k}'| \quad (2.17)$$

Finalmente, teniendo en cuenta los resultados de las ecuaciones (2.7), (6.5) y (2.15) en

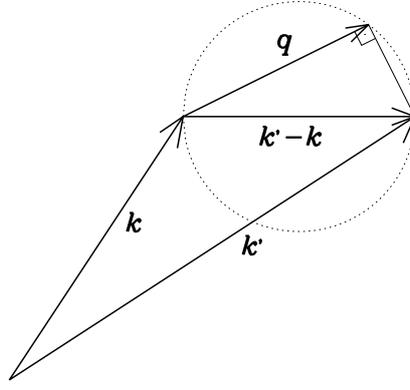


Figura 2.2: Representación posibles vectores  $\vec{q}$ .

la ecuación (2.6), la probabilidad de transición resulta:

$$\begin{aligned} T_{\vec{k},-; \vec{k}',\sigma \rightarrow \vec{k}+\vec{q},+; \vec{k}'-\vec{q},\sigma} &= \frac{2\pi}{\hbar} \delta \left[ \frac{\hbar^2}{m^*} \vec{q} \cdot (\vec{k} - \vec{k}' + \vec{q}) \right] \cdot \\ &\left\{ \left| \langle \vec{k} + \vec{q}, + | \vec{k}, - \rangle \right|^2 V(q)^2 + \left| \langle \vec{k}' - \vec{q}, \sigma | \vec{k}, - \rangle \langle \vec{k} + \vec{q}, + | \vec{k}', \sigma \rangle \right|^2 V(\vec{k} - \vec{k}' + \vec{q})^2 - \right. \\ &\left. - 2 \operatorname{Re} \left[ V(q) V(\vec{k} - \vec{k}' + \vec{q}) \langle \vec{k} + \vec{q}, + | \vec{k}, - \rangle \langle \vec{k}' - \vec{q}, \sigma | \vec{k}, - \rangle \langle \vec{k} + \vec{q}, + | \vec{k}', \sigma \rangle \right] \right\} \quad (2.18) \end{aligned}$$

Para determinar el tiempo de relajación de espín del sistema debemos considerar todos las posibles funciones de onda electrónicas. Al considerar todas los términos en las sumas sobre  $\vec{k}$ ,  $\vec{k}'$  y  $\vec{q}$ , la contribución de los términos de interferencia se anula por una cuestión de simetría [13]. Entonces sólo resta calcular el resultado del acoplamiento entre el término directo y el de intercambio. En el apéndice 6.2 se muestra que la contribución del término de intercambio es igual a la del término directo. Este resultado es distinto al señalado en

su trabajo por Boguslawsky [11], quien afirma que la contribución de intercambio es la cuarta parte de la del término directo.

Finalmente, desarrollando la expresión anterior y agrupando convenientemente, la inversa de  $T_1$  resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} = & \frac{8\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \vec{q}} \delta \left[ \frac{\hbar^2}{2m^*} \vec{q} \cdot (\vec{k} - \vec{k}' + \vec{q}) \right] V(q)^2 \left| \langle \vec{k} + \vec{q}, - | \vec{k}, + \rangle \right|^2 \cdot \\ & \cdot \left\{ f_+(k) \left[ 1 - f_-(\vec{k} + \vec{q}) \right] - f_+(k) \left[ 1 - f_-(\vec{k} + \vec{q}) \right] \right\} \cdot \\ & \cdot \left\{ f_+(k') \left[ 1 - f_+(\vec{k}' - \vec{q}) \right] + f_-(k') \left[ 1 - f_-(\vec{k}' - \vec{q}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Pasando la suma discreta al continuo y considerando empleando simetrías del cálculo a realizar (detalladas en el apéndice 6.2), la expresión anterior resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} = & \left[ \frac{\Delta (2E_g + \Delta)}{E_g(\Delta + E_g)(2\Delta + 3E_g)} \right]^2 \frac{\hbar e^4}{n_{ex} m^* \epsilon^2 \pi^3} \int_0^\infty dk \int_0^\infty dq \int_{-1}^1 d(\cos \theta_q) \int_0^\infty dk' k^4 q^3 k' \frac{(1 - \cos^2 \theta_q)}{(q^2 + k_s^2)^2} \\ & \left\{ f_+(k) \left[ 1 - f_-(\sqrt{k^2 + q^2 + 2kq \cos \theta_q}) \right] - f_-(k) \left[ 1 - f_+(\sqrt{k^2 + q^2 + 2kq \cos \theta_q}) \right] \right\} \\ & \left\{ f_+(k') \left[ 1 - f_+(\sqrt{k'^2 - q^2 - 2kq \cos \theta_q}) \right] + f_-(k') \left[ 1 - f_-(\sqrt{k'^2 - q^2 - 2kq \cos \theta_q}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde sólo quedan cuatro integrales para resolver.

El tiempo de relajación es no nulo a temperatura nula ya que, si  $T = 0$ , la expresión de la ecuación (2.20) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} = & \left[ \frac{\Delta (2E_g + \Delta)}{E_g(\Delta + E_g)(2\Delta + 3E_g)} \right]^2 \frac{\hbar e^4}{n_{ex} m^* \epsilon^2 \pi^3} \int_0^{k_{F+}} dk \int_0^{2k_{F+}} dq \int_{-1}^1 d(\cos \theta_q) \int_0^{k_{F+}} dk' k^4 q^3 k' \frac{(1 - \cos^2 \theta_q)}{(q^2 + k_s^2)^2} \\ & \left[ \theta(k_{F+} - k) \theta \left( \sqrt{k^2 + q^2 + 2kq \cos \theta_q} - k_{F-} \right) - \theta(k_{F-} - k) \theta \left( \sqrt{k^2 + q^2 + 2kq \cos \theta_q} - k_{F+} \right) \right] \\ & \left[ \theta(k_{F+} - k') \theta \left( \sqrt{k'^2 - q^2 - 2kq \cos \theta_q} - k_{F+} \right) + \theta(k_{F-} - k') \theta \left( \sqrt{k'^2 - q^2 - 2kq \cos \theta_q} - k_{F-} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde  $k_{F\pm}$  representa el vector de Fermi asociado a la distribución de electrones con polarización  $\pm$ :

$$k_{F\pm} = (6 \pi^2 n_{\pm})^{1/3} \quad (2.22)$$

y la función  $\theta(x)$  es:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Los límites de integración en la ecuación (2.21) fueron asignados de acuerdo teniendo en cuenta los límites de las funciones  $f_\sigma(k)$  y lo expresado en la ecuación (2.16).

Los cálculos de  $T_1$  fueron realizados con un código sobre Fortran 77 paralelo. Resultó conveniente la implementación del cálculo en programación paralela ya que cada punto de los gráficos requería de al menos 30 minutos empleando sólo una computadora.

# Capítulo 3

## Resultados en GaAs

En este capítulo se presentarán los resultados obtenidos para los cálculos del tiempo de relajación de espín  $T_1$  en arsenuro de galio (GaAs) para scattering electrón-electrón por el mecanismo de Elliot-Yafet de acuerdo a la ecuación (2.20) del capítulo anterior. La discusión de los resultados presentados será realizada en el capítulo 5.

Los cálculos se realizaron para diferentes dopajes  $n$ , diferentes densidades de electrones excitados  $n_{ex}$  y diferentes temperaturas  $T$ . Los dopajes  $n$  fueron variados entre  $10^{15}\text{cm}^{-3}$  y  $10^{18}\text{cm}^{-3}$ , las densidades de electrones fotoexcitados se tomaron entre  $10^{13}\text{cm}^{-3}$  y  $10^{18}\text{cm}^{-3}$ , teniendo en cuenta que siempre fuese menor que la densidad de dopaje. Las temperaturas del sistema se variaron entre 1K y 300K. Dentro de este rango de los parámetros  $T$ ,  $n$  y  $n_{ex}$  se encontraban las condiciones experimentales del trabajo realizado por Kikkawa *et al* [1], las cuales mediante los cálculos de  $T_1$  se intenta modelar. Además se realizaron los cálculos de la relajación de espín a temperatura cero por este mecanismo.

En el caso del arsenuro de galio, los parámetros característicos del material son:

$$m^* = 0.067 \quad \epsilon = 13.1 \quad E_g = 1519\text{meV} \quad \Delta = 341\text{meV}$$

Debido a que se hará un análisis del tiempo de relajación en función de la temperatura es conveniente, antes de describir los resultados, calcular la temperatura característica de

cada población de espín para las distribuciones de Fermi-Dirac para tener idea de su orden de magnitud frente a la temperatura del sistema. Para una distribución de electrones con polarización  $\sigma$ , se define la temperatura de Fermi  $T_{F\sigma}$  como:

$$T_{F\sigma} = \frac{\hbar^2 (6\pi^2 n_\sigma)^{2/3}}{2 m^* k_B} \quad (3.1)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $n_\sigma$  la densidad de electrones con polarización  $\sigma$ . En la figura 3.1 se puede notar que para dopajes de  $10^{15}\text{cm}^{-3}$  hasta  $10^{18}\text{cm}^{-3}$ , las temperaturas de Fermi asociadas a dichas poblaciones van se encuentran en un rango desde 0.6K hasta 60K aproximadamente. Esta es la razón por la cual resulta adecuado emplear distribuciones de Fermi-Dirac para describir a las densidades electrónicas y no emplear Maxwell-Boltzmann, ya que estas últimas pueden ser adecuadas si  $T \gg T_F$ .

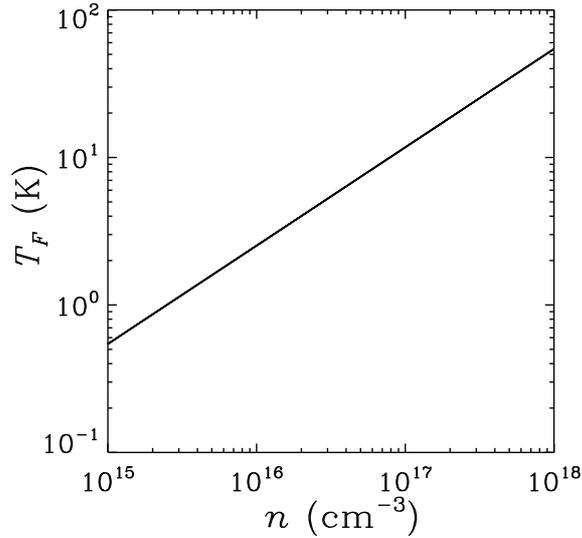


Figura 3.1:  $T_F$  vs  $n$  para GaAs.

Comenzando ahora con los resultados de los cálculos, se define la densidad de excitados relativa  $n_{exr}$  como la relación entre la densidad de excitados y el dopaje ( $n_{exr} \equiv n_{ex}/n$ ). En primer lugar, la figura 3.2 muestra los resultados de  $T_1$  en función de  $n$  para  $n_{exr}$  de 0.001, 0.010 y 0.100 y temperaturas en un rango entre 1K y 315K. Se observa en dicha figura que el tiempo de relajación decrece fuertemente a medida que aumentan

el dopaje y la temperatura. En la figura 3.2 podemos separar el gráfico en regiones de acuerdo a los diferentes regímenes del sistema, teniendo en cuenta los resultados de la figura 3.1. Para  $T > 100K$  y  $n \lesssim 10^{16} \text{cm}^{-3}$  podemos decir que el sistema se encuentra en un régimen de alta temperatura ( $T \gg T_F$ ). Mientras que en la “esquina” opuesta del gráfico,  $T < 3.2K$  y  $n \approx 10^{18} \text{cm}^{-3}$ , es un régimen de baja temperatura donde  $T < T_F$ . En el resto de las regiones, podemos decir que  $T \approx T_F$ . Tal como es de esperarse, se aprecian comportamientos diferentes según la relación entre la temperatura del sistema  $T$  y la temperatura de Fermi asociada al sistema  $T_F$ . Por ejemplo, para altas temperaturas ( $T_F < T$ ), el tiempo de relajación resulta prácticamente independiente de la densidad relativa de electrones excitados. Mientras que a temperaturas bajas y densidades altas (donde  $T_F > T$ ), el tiempo tiempo de relajación decrece más pronunciadamente con el dopaje cuanto mayor es la densidad relativa de electrones fotoexcitados. Observando, en particular, el caso en que  $n_{exr}$  de 0.100 se puede ver que, a altas densidades ( $n \gtrsim 10^{17} \text{cm}^{-3}$ ) y temperaturas bajas, que  $T_1$  resulta prácticamente independiente de  $T$ .

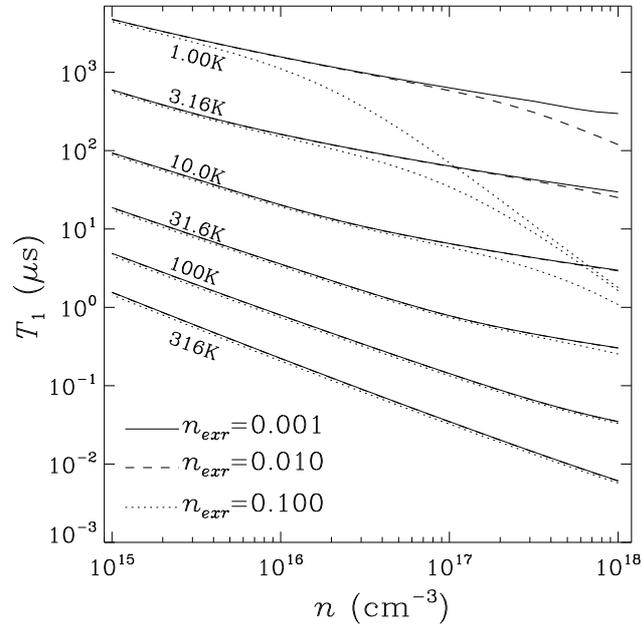


Figura 3.2:  $T_1$  vs  $n$  para diferentes  $T$  y  $n_{exr}$  de 0.001, 0.010 y 0.100

Centrándonos ahora en la región correspondiente al régimen de baja temperatura, se calculó el tiempo de relajación en el límite de  $T = 0$ , de acuerdo a la expresión de la ecuación (2.21). En la figura 3.3 se representaron los tiempos de relajación del sistema a  $T = 0$  en función de  $n$  para distintos valores de  $n_{exr}$ ; mientras que en la figura 3.4, se muestran los resultados en función de  $n_{exr}$  para diferentes valores de  $n$ . De acuerdo a estos gráficos podemos observar que  $T_1$  obedece leyes de potencias en su dependencia con  $n$ . En el caso de la dependencia con  $n_{exr}$ , el comportamiento es aproximadamente una ley de potencia. Las tablas 3.1 y 3.2 muestran los resultados obtenidos para cada una de estas curvas.

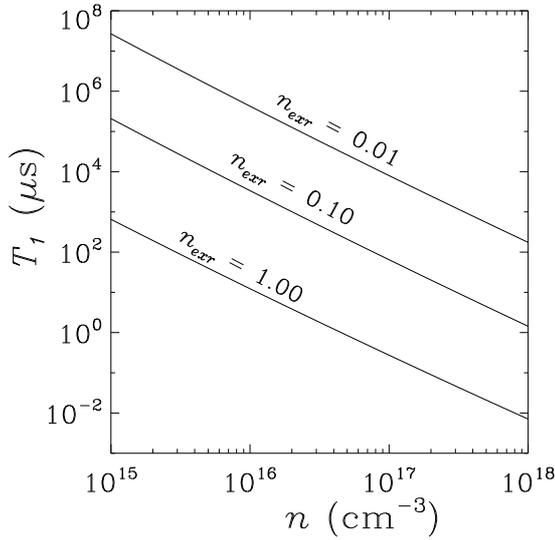


Figura 3.3:  $T_1$  vs  $n$  para diferentes  $n_{exr}$  a  $T = 0$ .

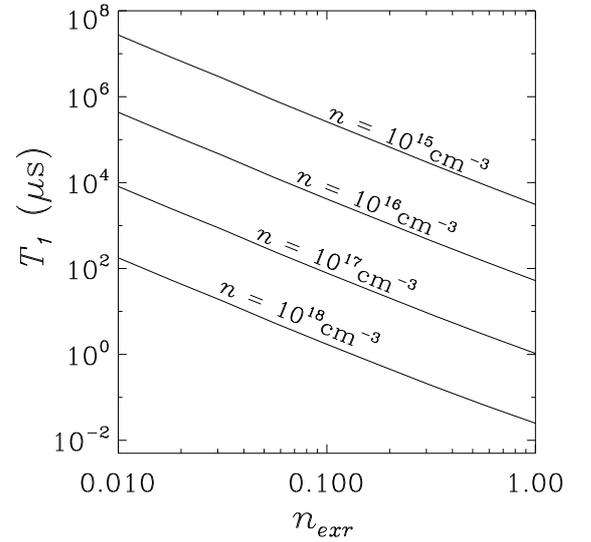


Figura 3.4:  $T_1$  vs  $n_{exr}$  para diferentes  $n$  a  $T = 0$ .

Observando el resultado de la ecuación (2.21) es posible obtener vía adimensionalización de las variables a integrar la dependencia de  $T_1$  con la  $k_F$  y por lo tanto con la densidad a  $T = 0$ . Observando dicha ecuación se puede concluir que el tiempo de relajación a  $T \approx 0$  debería variar con la temperatura con una ley de potencias de  $T_1 \sim T^\alpha$  con  $\alpha$  entre  $-5/3$  y  $-7/3$ . El hecho que el exponente no pueda ser determinado a priori se debe a que en el denominador del integrando de la ecuación (2.21) tenemos la suma

Tabla 3.1: Exponentes  $T_1 \sim n^\beta$

$n_{exr}$	$\beta$
0.01	-2.24
0.10	-2.20
1.00	-2.21

Tabla 3.2: Exponentes  $T_1 \sim n_{ex}^\alpha$

$n$ (cm <sup>-3</sup> )	$\alpha$
10 <sup>15</sup>	-1.65
10 <sup>16</sup>	-1.72
10 <sup>17</sup>	-1.73
10 <sup>18</sup>	-1.70

de dos términos  $q$  y  $k_s$ , los cuales varían con el dopaje con exponentes de  $1/3$  y  $2/3$ , respectivamente (ver ecuaciones (2.12) y (2.22)).

En la figura 3.5 se superponen los resultados obtenidos de  $T_1$  en función de  $n$  para  $n_{exr} = 0.10$  a diferentes temperaturas entre 1K y 17.8K con el resultado obtenido bajo iguales condiciones a  $T = 0$ . Se puede apreciar en dicha figura, para cada temperatura, a partir de una cierta densidad, a la que llamaremos  $n_c$ , el tiempo es independiente de  $T$  y coincide con el correspondiente a  $T = 0$ . La densidad crítica  $n_c$  correspondiente a cada temperatura es mayor cuanto mayor es  $T$ .

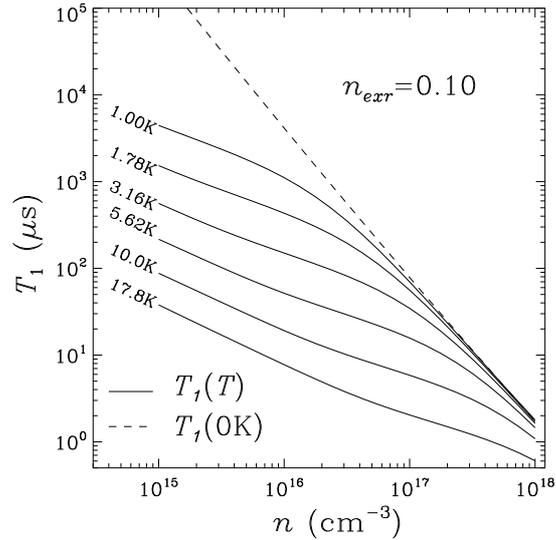


Figura 3.5:  $T_1$  vs  $n_{dens}$   $T = 0$  y  $1K < T < 17.8K$  para  $n_{exr} = 0.10$ .

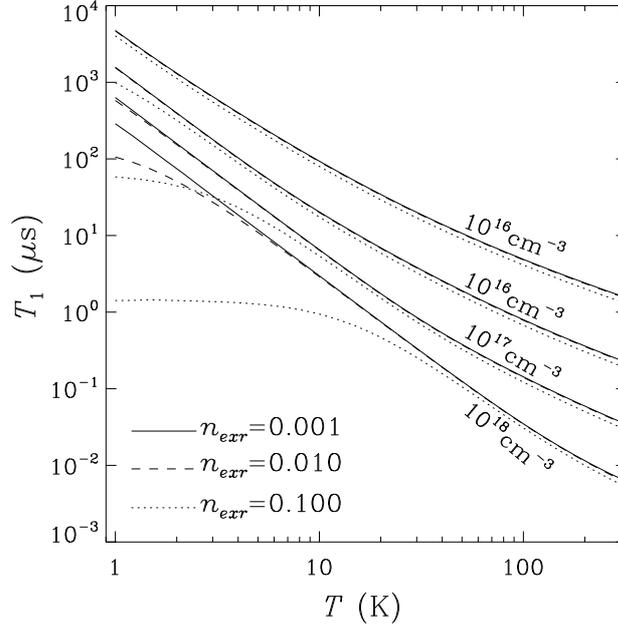


Figura 3.6:  $T_1$  vs  $T$  para  $n$  y  $n_{exr}$  constantes

Haciendo ahora un estudio del comportamiento del tiempo de relajación en función de la temperatura, la figura 3.6 muestra la variación de  $T_1$  vs  $T$  para distintas densidades  $n$  y para densidades relativas de excitados  $n_{exr}$  de 0.001, 0.010 y 0.100. Nuevamente se pueden distinguir las regiones correspondientes a  $T \gg T_F$  ( $n > 10^{16} \text{cm}^{-3}$  y  $T \gtrsim 100 \text{K}$ ) y la de  $T < T_F$  ( $n > 10^{17} \text{cm}^{-3}$  y  $T < 10 \text{K}$ ). En esta figura se puede ver para altas  $n$  y  $n_{ex}$  que  $T_1$  satura a bajas temperaturas volviéndose constante. Este comportamiento se observa más claramente para  $n = 10^{18} \text{cm}^{-3}$  y  $n = 10^{17} \text{cm}^{-3}$  con  $n_{exr} = 0.100$ . La temperatura crítica por debajo de la cual se produce la saturación aumenta con  $n$ . Tal como se observó en la figura 3.2, aquí se puede apreciar que para altas temperaturas, los tiempos de relajación no dependen de la densidad relativa de excitados.

El hecho que para  $n_{exr}$  de 0.100, en el régimen de bajas temperaturas el tiempo de relajación presente una saturación al disminuir la temperatura resulta consistente con que en el límite de  $T = 0$  el tiempo  $T_1$  resulta no nulo. El mismo comportamiento parecería

comenzar a aparecer para  $n_{exr}$  de 0.010 a  $T \approx 1\text{K}$  y  $n = 10^{18}\text{cm}^{-3}$ . Lo mismo se esperaría que ocurriera para cualquier  $n_{exr}$  y cualquier  $n$  pero a temperaturas menores a 1K, por lo que en este rango no serían apreciables.

Por otro lado, en el régimen de  $n_{exr} = 0.001$  se puede observar en dicha figura, la dependencia con la temperatura (si  $T \lesssim 10\text{K}$ ). Se calculó la pendiente de  $T_1$  y se obtuvo una relación de ley de potencias  $T_1 \sim T^{-2}$ . Luego, el la medida que aumenta la temperatura, la dependencia con la dicha magnitud tiene una potencia menor.

A partir de estos resultados, se estudió en mayor detalle el tiempo de relajación  $T_1$  en función de la  $T$  y  $n_{exr}$ . En primer lugar se describirá el comportamiento de  $T_1$  al variar la temperatura desde 1K hasta 100K para diferentes densidades de electrones excitados, considerando densidades de dopaje  $n$  de  $10^{16}\text{cm}^{-3}$ ,  $10^{17}\text{cm}^{-3}$  y  $10^{18}\text{cm}^{-3}$ . Los resultados obtenidos se muestran en la figuras 3.7, 3.8 y 3.9. En las dos primeras de estas figuras se representaron sólo tres densidades de excitados indicadas. En cambio, en la figura 3.9, se representaron mayor cantidad de curvas correspondientes a diferentes densidades de excitados. Analizando, en particular, esta última figura, se observa que para cada densidad de electrones excitados aparece una temperatura cierta temperatura, a la que denominaremos  $T_c$ , a partir de la cual el tiempo de relajación cambia su dependencia con la temperatura. Para  $T < T_c$ , el  $T_1$  prácticamente no depende de la temperatura, mientras que para  $T > T_c$  el tiempo comienza a disminuir con la temperatura. Otra de las apreciaciones que pueden hacerse aquí es que cuanto menor es  $n_{ex}$ , menor es el valor de  $T_c$ . También puede apreciarse en dichas figuras que para  $n_{ex} \ll n$ ,  $T_1$  prácticamente no depende de  $n_{ex}$ , tal como habíamos observado en la figura 3.6. Dicho comportamiento se observa para altas temperaturas y bajas densidades de fotoexcitados.

Del análisis de las pendientes de dichos gráficos para densidades de electrones fotoexcitados bajas y bajas temperaturas, se observa, nuevamente, que la dependencia del tiempo de relajación con la temperatura es  $T_1 \sim T^{-2}$ .

Por último se determinó el comportamiento del tiempo de relajación  $T_1$  al variar la

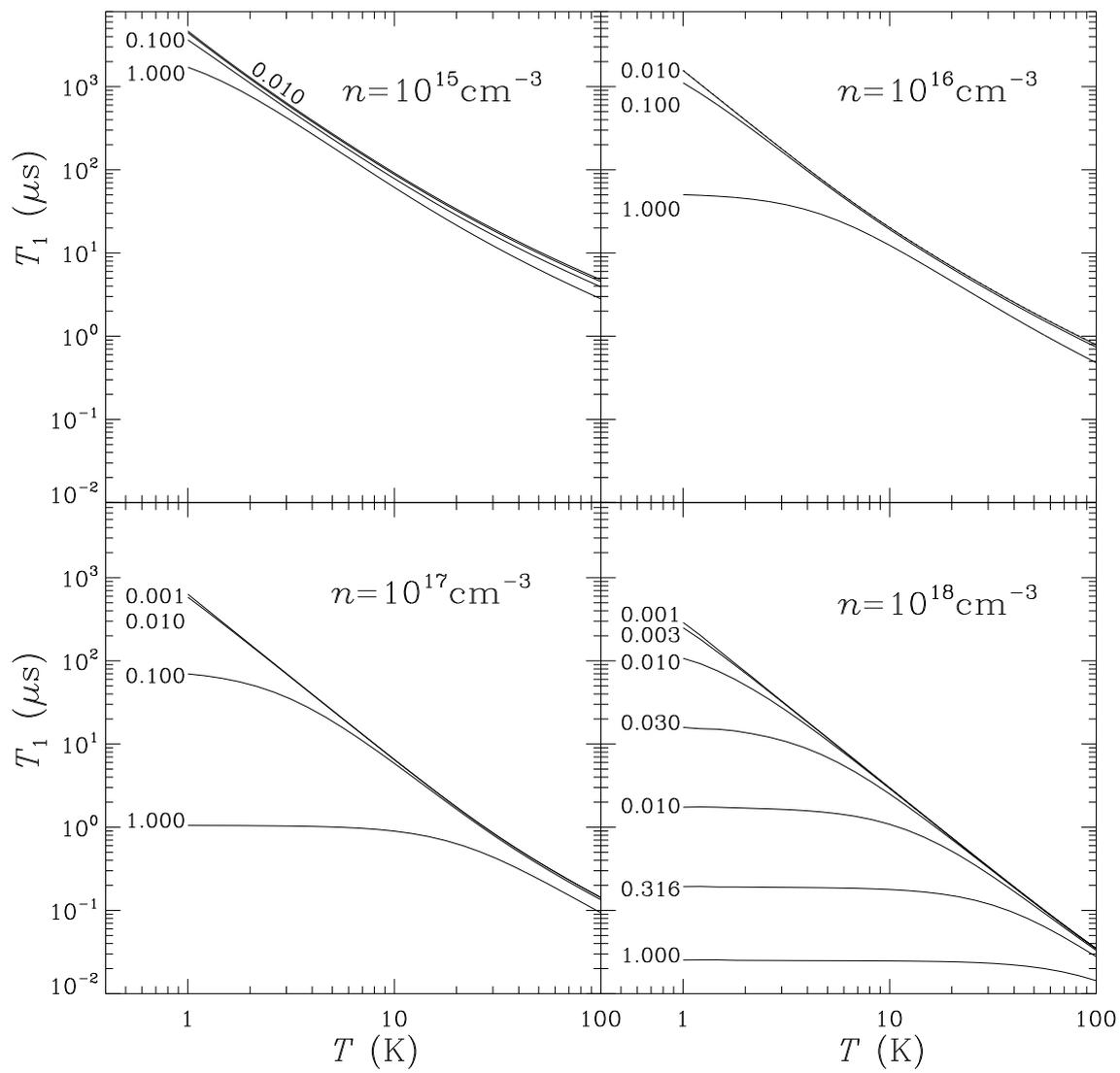


Figura 3.7:  $T_1$  vs  $T$ .

densidad de excitados  $n_{ex}$ , para diferentes temperaturas, manteniendo el dopaje fijo. En las figuras ??, ?? y ?? se muestran los resultados obtenidos para dopajes de  $10^{16}\text{cm}^{-3}$ ,  $10^{17}\text{cm}^{-3}$  y  $10^{18}\text{cm}^{-3}$  variando las temperaturas entre 1K y 100K. Como es posible apreciar en las figuras para  $n_{ex}$  bajas respecto a  $n$ , el tiempo de relajación prácticamente no depende de la densidad de excitados. En cambio, cuando  $n_{ex}$  del mismo orden que el dopaje del semiconductor, el tiempo de relajación obtenido parece ser independiente de la temperatura. Esto es más notable cuanto mayor es el dopaje. Esto se condice con lo encontrado en las figuras 3.7, 3.8 y 3.9. En la figura ?? es posible observar que al aumentar la densidad de electrones fotoexcitados, el tiempo de relajación se hace independiente de la temperatura, y se aprecia un comportamiento  $T_1 \sim n_{ex}^{-2}$ .

Nuevamente se observa en dichas figuras, la presencia de densidades de excitados críticas ( $n_{exc}$ ) en las cuales el forma funcional del tiempo de relajación cambia notoriamente. El valor de  $n_{exc}$  aumenta, ccuanto mayor es  $T$  y menor es  $n$ .

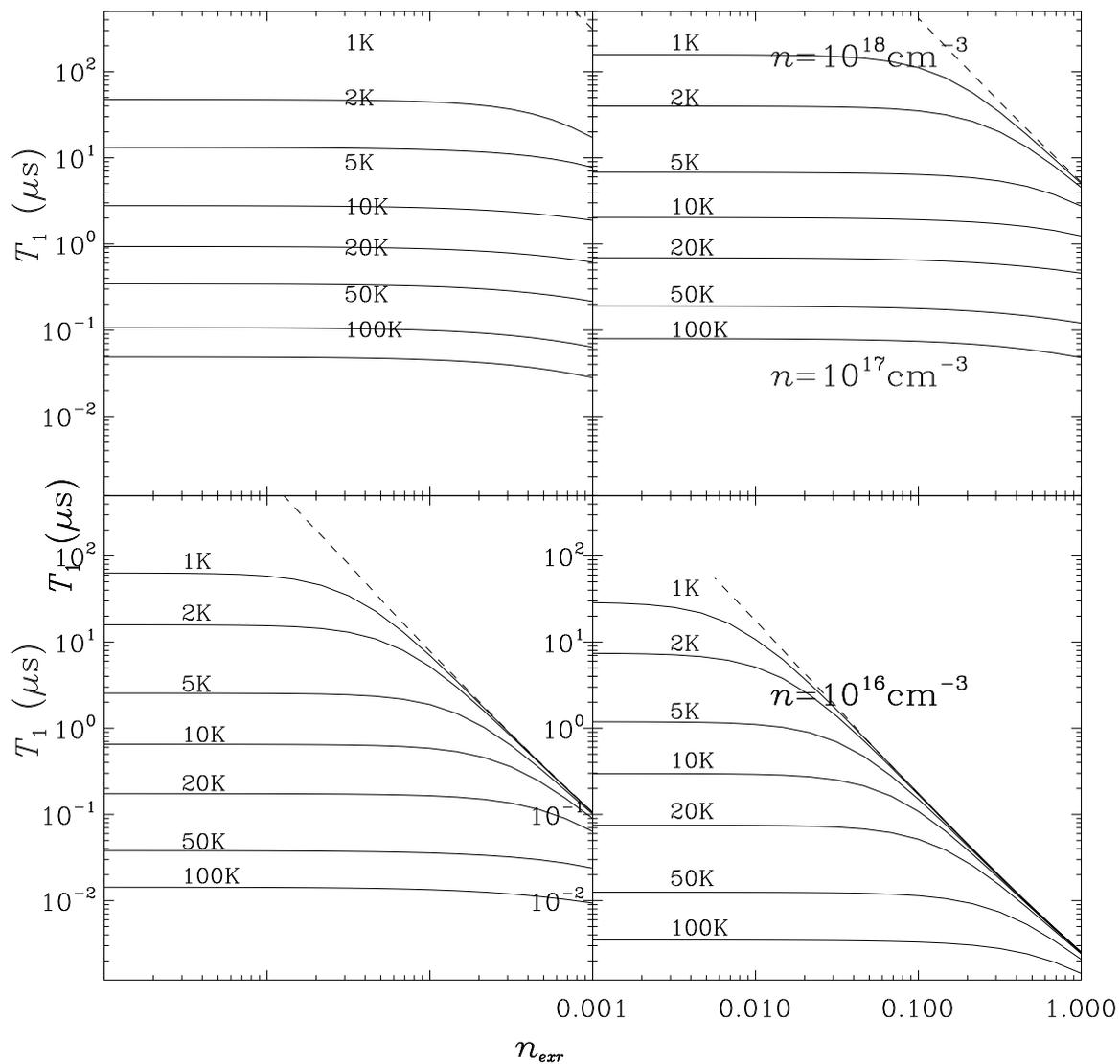


Figura 3.8:  $T_1$  vs  $n_{ex}$  para  $n = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ .

# Capítulo 4

## Comparación con InAs y InSb

Se calculó el tiempo de relajación en los semiconductores arsenuro de indio (InAs) y antimonuro de indio (InSb) empleando el mismo código para comparar con los resultados de GaAs. La tabla 4.1 detalla las diferencias entre los parámetros correspondientes a cada material.

Tabla 4.1: Propiedades de los Semiconductores

Material	$m^*$	$\epsilon$	$E_g$ [meV]	$\Delta$ [meV]
GaAs	0.067	13.1	1519	341
InAs	0.026	14.6	450	380
InSb	0.015	17.7	240	810

Como se puede apreciar, en el GaAs  $E_g > \Delta$ , mientras que en el InAs,  $E_g \sim \Delta$  y en el InSb  $E_g < \Delta$ . Además  $m_{GaAs}^* > m_{InAs}^* > m_{InSb}^*$ , con lo cual a igual dopaje, la energía de Fermi del sistema será mayor cuanto menor sea la  $m^*$ .

Se realizaron cálculos similares a los del GaAs para los dos semiconductores, variando los mismos parámetros del sistema ( $n$ ,  $n_{ex}$ , y  $T$ ) y se compararon los resultados obtenidos.

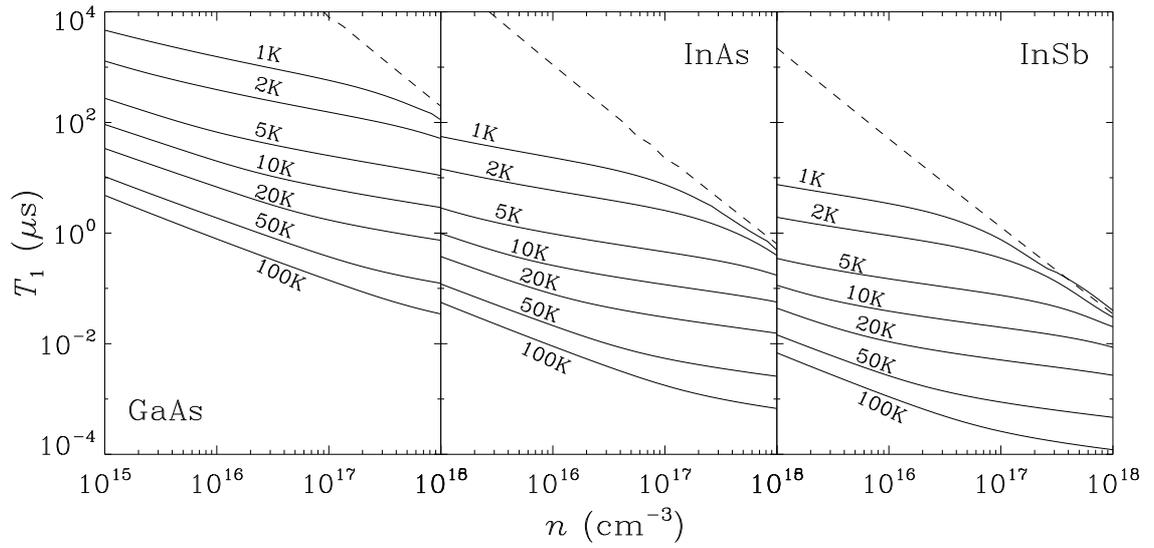


Figura 4.1:  $T_1$  vs  $n$  para  $n_{ex} = 0.01n_{dens}$  en GaAs, InAs y InSb a diferentes temperaturas.

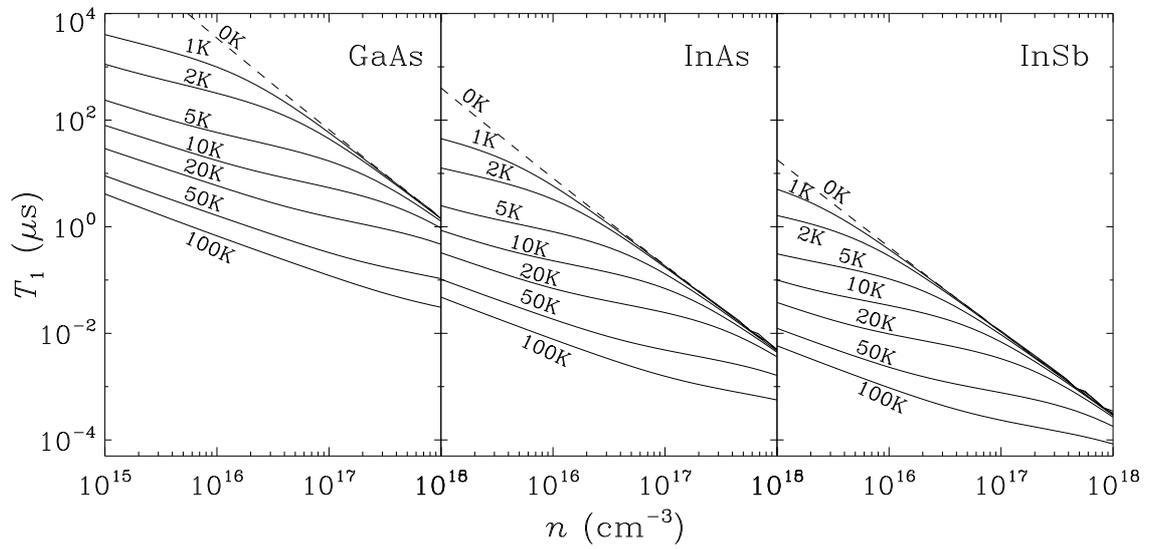


Figura 4.2:  $T_1$  vs  $n$  para  $n_{ex} = 0.10n_{dens}$  en GaAs, InAs y InSb a diferentes temperaturas.

Las figuras 4.1 y 4.2 muestran los gráficos correspondientes al tiempo de relajación en función del dopaje para cada uno de los semiconductores con  $n_{exr}$  de 0.01 y 0.10, respectivamente. Además se ha agregado el tiempo correspondiente a  $T = 0$ . Como se puede apreciar, en iguales condiciones, los tiempos de relajación para semiconductores GaAs son mayores a los de InAs. Estos últimos a su vez son mayores a los del InSb. La dependencia con el dopaje y la temperatura parece prácticamente similar. En la figura 4.2 puede notarse que si bien forma funcional se asemeja en los tres semiconductores, la densidad  $n_c$  (a la cual  $T_1$  no depende de  $T$ ) es mayor el GaAs respecto a los otros dos materiales. A su vez, en el caso del InAs la densidad es mayor respecto al InSb.

En las figuras 4.3 y 4.4 se muestran los resultados obtenidos de  $T_1$  vs  $n_{ex}$  para el InAs con  $n = 10^{16}\text{cm}^{-3}$  y  $n = 10^{18}\text{cm}^{-3}$ , respectivamente. Los gráficos 4.3 y 4.4 muestran iguales curvas para el InSb.

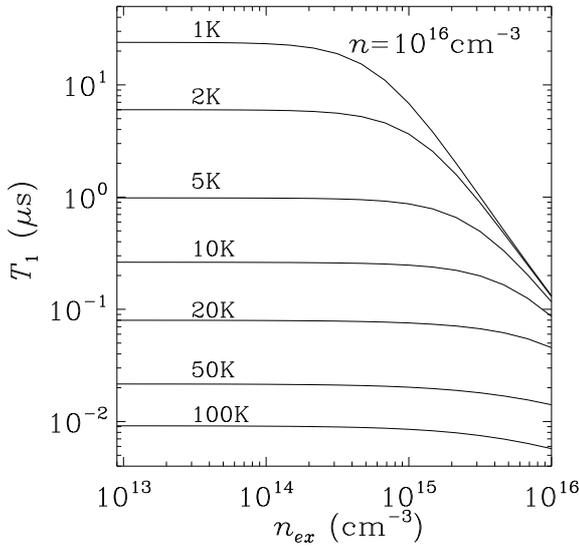


Figura 4.3:  $T_1$  vs  $n_{ex}$  para ( $n = 10^{16}\text{cm}^{-3}$ ) para InAs a  $T$  constante.

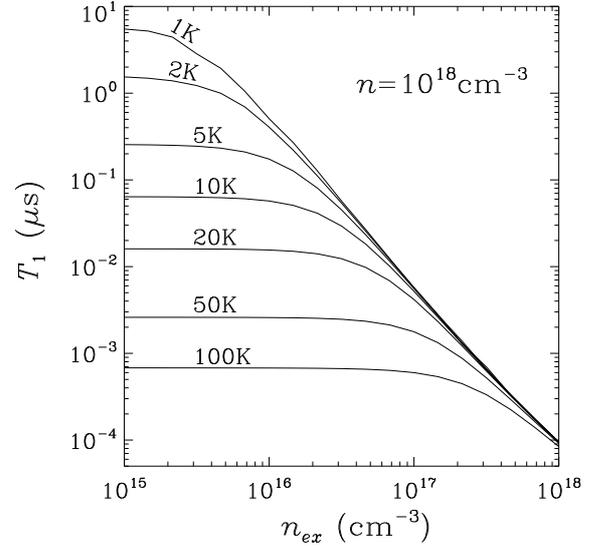


Figura 4.4:  $T_1$  vs  $n_{ex}$  para ( $n = 10^{18}\text{cm}^{-3}$ ) en InSb a  $T$  constante.

En las figuras 4.7 y 4.8 se muestran los resultados obtenidos de  $T_1$  vs  $T$  para el InAs para diferentes  $n$  y diferentes  $n_{ex}$ . Aquí se puede apreciar nuevamente la presencia de una temperatura crítica  $T_c$  donde el tiempo de relajación cambia su dependencia con la

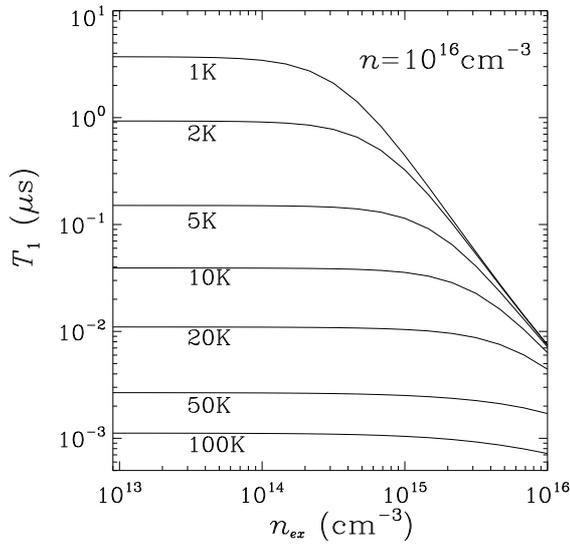


Figura 4.5:  $T_1$  vs  $n_{ex}$  para ( $n = 10^{18} \text{cm}^{-3}$ ) en InSb a  $T$  constante.

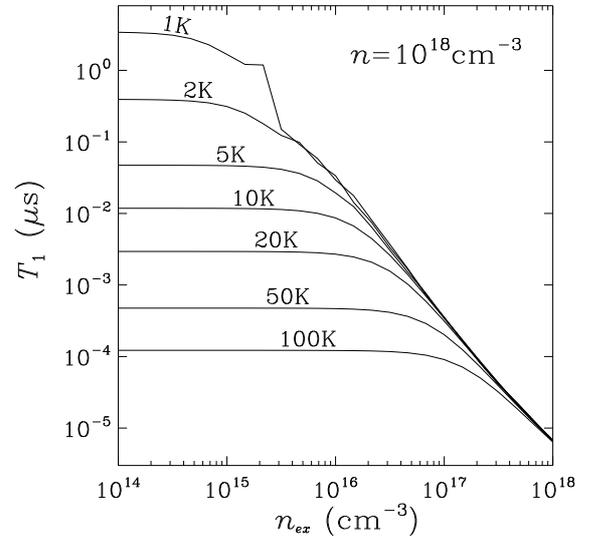


Figura 4.6: Comparación de  $T_1$  vs  $n_{ex}$  para ( $n = 10^{18} \text{cm}^{-3}$ ) en GaAs, InAs y InSb a temperatura constante.

temperatura. Lo mismo ocurre también para el InSb, como se muestra en las figuras 4.9 y 4.10, siendo, en iguales condiciones, mayor la  $T_c$  del InSb respecto a la del InSb.

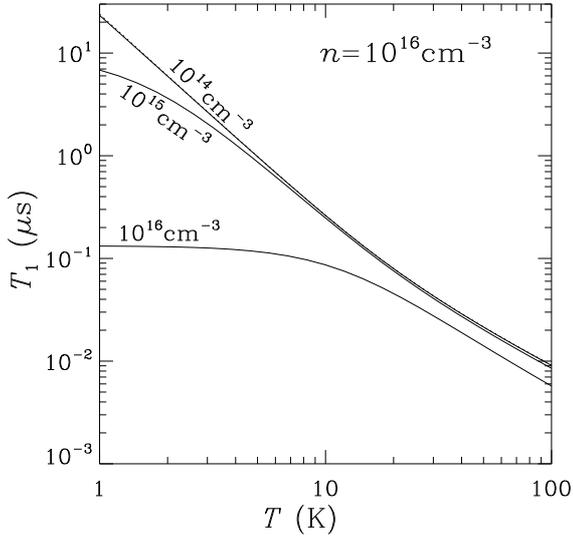


Figura 4.7:  $T_1$  vs  $T$  para ( $n = 10^{16}\text{cm}^{-3}$ ) para InAs a  $n_{ex}$  constante.

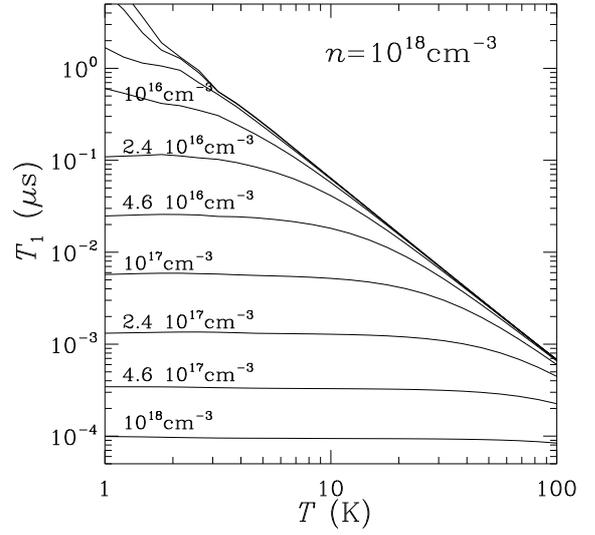


Figura 4.8:  $T_1$  vs  $T$  para ( $n = 10^{18}\text{cm}^{-3}$ ) para InAs a  $n_{ex}$  constante.

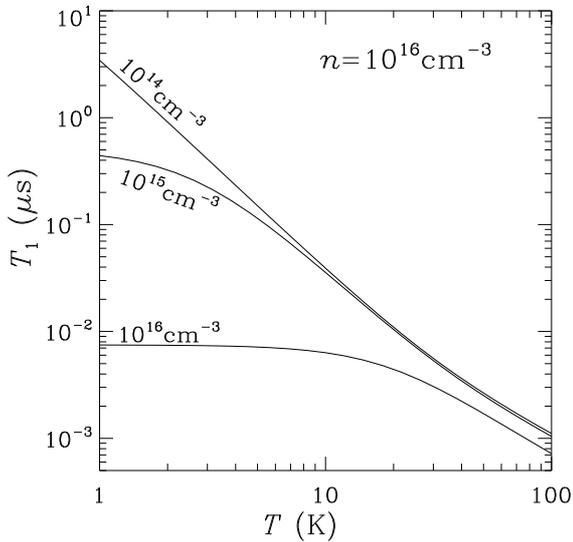


Figura 4.9:  $T_1$  vs  $T$  para ( $n = 10^{16}\text{cm}^{-3}$ ) para InSb a  $n_{ex}$  constante.

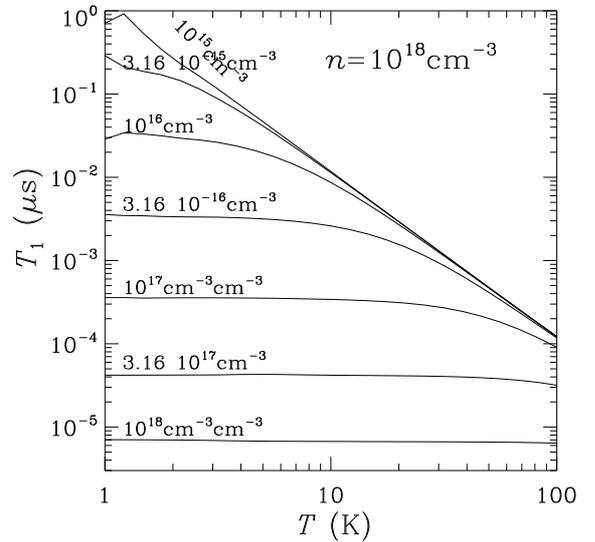


Figura 4.10:  $T_1$  vs  $T$  para ( $n = 10^{18}\text{cm}^{-3}$ ) para InSb a  $n_{ex}$  constante.

# Capítulo 5

## Análisis de Resultados

En este capítulo se realizará un análisis detallado de la dependencia de  $T_1$  en GaAs con las variables  $n$ ,  $n_{ex}$  y, especialmente,  $T$ . En particular analizaremos los cambios en los tipos de dependencia que muestra  $T_1$  con  $T$  que han sido ilustrados en el capítulo 3.

En segundo lugar, se compararán los resultados resultados de los cálculos debidos a este mecanismo con los resultados experimentales de Kikkawa y Awschalom ??.

### 5.1 Análisis del la dependencia con la temperatura

En las figuras 3.7, 3.8 y 3.9 del capítulo 3 hemos señalado la existencia de una temperatura crítica debajo de la cual  $T_1$  es prácticamente independiente de  $T$  y por encima de la cual  $T_1$  decrece con  $T$  obedeciendo una ley de potencias de  $T_1 \sim T^{-2}$ . Dicho de otra forma, habíamos distinguido tres situaciones diferentes:

(I)  $n_{ex} \lesssim n$  y  $T < T_c$ : donde el tiempo de relajación prácticamente no dependía de la temperatura.

(II)  $n_{ex} \ll n$ : donde el comportamiento era  $T_1 \sim T^{-2}$ .

(III)  $T \gg T_c$  y  $n$  bajas: donde la dependencia con la temperatura era menos débil que  $T^{-2}$ .

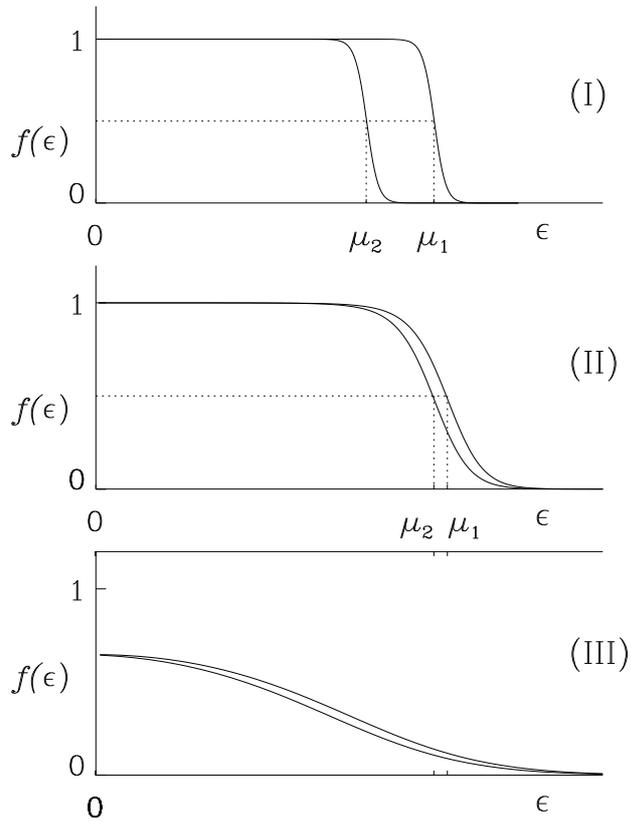


Figura 5.1: Distribuciones de Fermi según los diferentes casos: (I)  $n_{ex} \lesssim n$  (II)  $n_{ex} \ll n$  y  $T > T_c$  (III)  $T \gg T_c$

Según la relación entre los tres parámetros  $(T, n_{ex}, n)$  podemos diferenciar tres tipos de situaciones en que se produce la relajación de espín de acuerdo a las distribuciones de Fermi de cada población las cuales están representadas en la figura 5.1. La situación (I) corresponde a temperaturas tales que el ancho típico de la distribución de Fermi es menor a la diferencia de las energías de Fermi de cada una de las polarizaciones ( $k_B T < \mu_1 - \mu_2$ ). El caso (II) corresponde a distribuciones de Fermi pronunciadas pero el ancho típico donde la distribución es mayor a la diferencia entre las energías de Fermi de cada estado de polarización ( $\Delta k_B T > \mu_1 - \mu_2$ ). Por último, el caso (III) donde la temperatura ya es lo suficientemente alta como para suavizar las distribuciones de Fermi.

Para corroborar que dicho cambio de comportamiento en los tiempos de relajación al variar la temperatura se debía a las situaciones descritas anteriormente, se estimó la temperatura crítica  $T_c$  a partir de la cual, para cada densidad de excitados, se produce

dicho cambio. Dicha estimación fue realizada para un dopaje de  $10^{18} \text{cm}^{-3}$ , debido a que en ese caso el efecto es más notable. Para esto, en la figura 5.2 se graficó el cociente  $T_1(T, n_{ex})/T_1(T, n_{ex} = 10^{15} \text{cm}^{-3})$  en función de la temperatura (siendo  $n_{ex} = 10^{15} \text{cm}^{-3}$  la más baja de las densidades de excitados considerada).

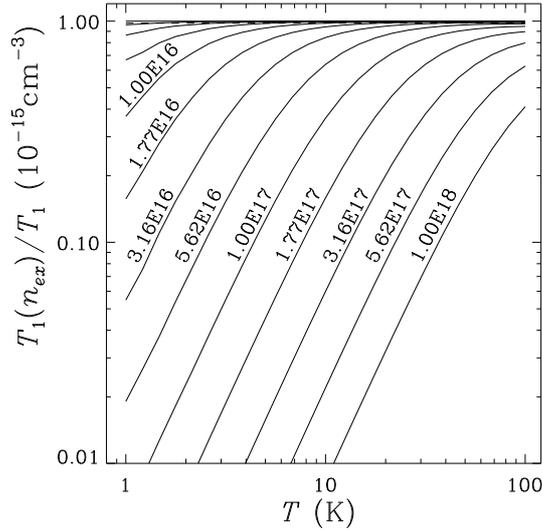


Figura 5.2: Cociente  $T_1(n_{ex})/T_1(10^{15} \text{cm}^{-3})$  vs  $T$

A su vez, en la figura 5.3, se calculó para cada densidad de excitados y dopaje la temperatura asociada a la diferencia entre las energías de Fermi de los electrones con espín + y -, es decir,

$$T_{+-} = \frac{E_{F+} - E_{F-}}{k_B} \quad (5.1)$$

En la figura 5.4 se representó la temperatura  $T_c$  en función de  $T_{+-}$  para cada  $n_{ex}$  en el caso de  $n = 10^{18} \text{cm}^{-3}$ , densidad a la cual el efecto era más notable. En dicha figura muestra que ambas temperaturas prácticamente coinciden. De esto podemos desprender entonces que:

$$T_{+-} = \frac{\hbar^2}{2m^* k_B} \left\{ \left[ 3\pi^2 \left( \frac{n}{2} + n_{ex} \right) \right]^{2/3} - \left( 3\pi^2 \frac{n}{2} \right)^{2/3} \right\} \quad (5.2)$$

El resultado de la ecuación (5.2) resulta coherente con lo observado anteriormente en las figuras ?? donde se puede apreciar que la temperatura  $T_c$  disminuye al aumentar la masa efectiva  $m^*$  del semiconductor.

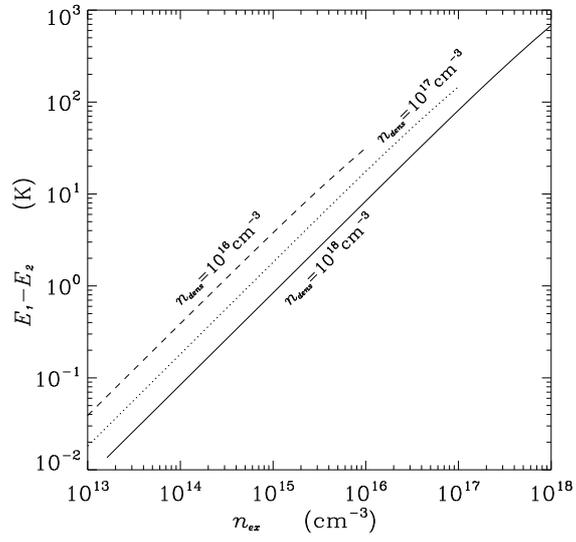


Figura 5.3:  $T_{1-2}$  vs  $n_{ex}$  para diferentes dopajes.

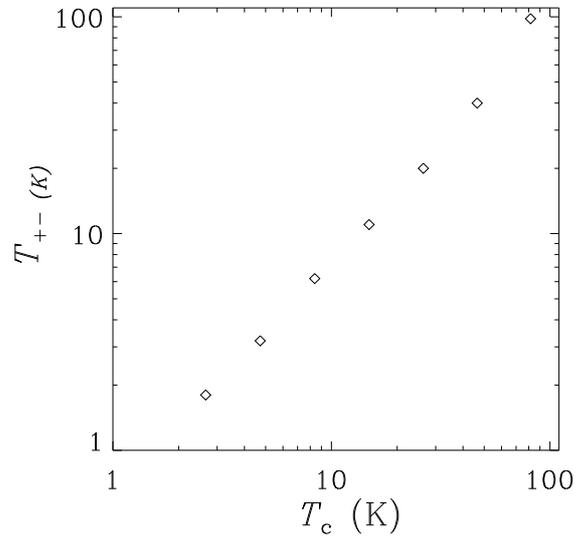


Figura 5.4:  $T_{+-}$  vs  $T_c$  para  $n = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ .

En la situación (II), donde  $T > T_c$  el comportamiento de la inversa del tiempo de relajación  $T_1$  puede explicarse según la expansión de Sommerfeld [14] para temperaturas bajas respecto a la temperatura de Fermi asociada a la distribución ( $T \sim T_F$ ), donde:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(\varepsilon)f(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\mu} H(\varepsilon) d\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} (k_B T)^{2n} a_n \frac{d^{2n-1}}{d\varepsilon^{2n-1}} H(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=\mu} \quad (5.3)$$

Juntando las condiciones anteriormente mencionadas, la ecuación 5.3 resulta válida si  $T_{+-} < T \lesssim T_F$ . La inversa del tiempo de relajación  $T_1$  puede expresarse como la diferencia de dos de estas integrales. Por lo tanto, a bajas temperaturas, la ecuación de  $T_1$  (2.20) resulta una resta de dos expansiones de Sommerfeld. En el primero de los casos, donde las temperaturas son mucho más bajas que la diferencia de energía de Fermi entre los dos niveles, la inversa del tiempo de relajación es prácticamente constante y es la diferencia entre los primeros términos de cada una de las expansiones para las distintas proyecciones de espín.

En la medida en que la densidad de excitados es pequeña frente al dopaje y las temperaturas son lo suficientemente bajas como para que el desarrollo de Sommerfeld sea válido pero elevadas como para situarnos en el segundo caso de la figura 5.1, el primer término de ambas integrales es prácticamente igual, y por lo tanto, la inversa del tiempo de relajación es proporcional al cuadrado de la temperatura.

Esto además es acorde a lo observado al comparar los tres semiconductores ya que cuanto menor es la masa efectiva del electrón  $m^*$ , mayor es diferencia de las energías de Fermi y por lo tanto, también es mayor  $T_{+-}$ .

## 5.2 Comparación con el experimento

Observando los resultados obtenidos para el arsenuro de galio, se puede observar que para regímenes en los que Kikkawa *et al* [3] realiza el experimento, correspondientes a temperaturas entre 5K y 100K y dopajes entre  $10^{16}$  y  $10^{18} \text{cm}^{-3}$ , la aproximación realizada por Boguslawski [11] de considerar las distribuciones electrónicas correctamente

descriptas por distribuciones de Boltzmann resulta algo poco apropiado. El caso de altas temperaturas parecería corresponder a temperaturas mayores que la ambiente, donde los semiconductores dejan de “comportarse como tales”, o dopajes muy bajos.

La figura 5.5 muestra los resultados obtenidos de  $T_1$  vs  $T$  para  $n = 10^{16} \text{cm}^{-3}$  para el scattering electrón- electrón y los resultados experimentales [3]. Comparando con los resultados obtenidos en ref. [3], en ausencia de campo magnético, los tiempos de relajación de espín obtenidos por interacción de Coulomb para el arsenuro de galio son aproximadamente 100 veces mayores, pese a que dicho autor estimaba que de acuerdo a las predicciones de Boguslawski  $T_1 \sim T^{-1/2}$  podría representar la dependencia más débil con la temperatura que dicho grupo encontró para temperaturas menores a los 30K. Además este mecanismo tampoco predice la dependencia con la densidad de electrones excitados ( $T_1 \sim n_{ex}^{-0.4}$ ) obtenida experimentalmente.

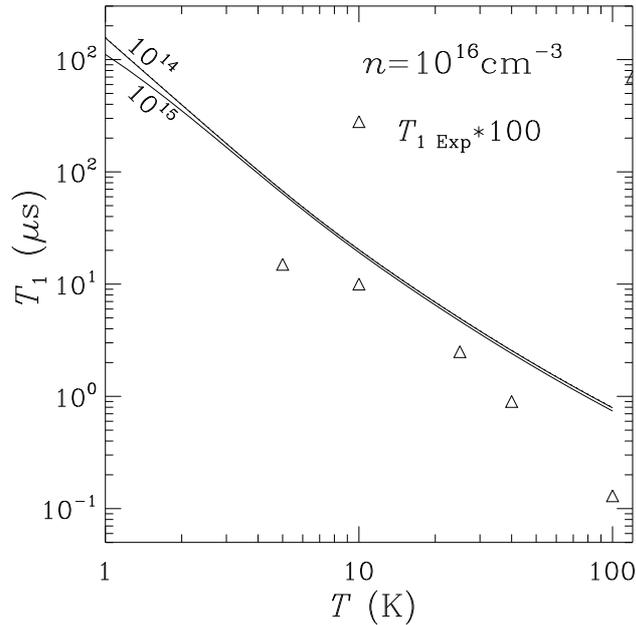


Figura 5.5: Comparación de  $T_1$  vs  $T$  para el scattering electrón-electrón con los resultados experimentales para  $n = 10^{16} \text{cm}^{-3}$ .

# Capítulo 6

## Apéndices

### 6.1 Cálculo de elementos de matriz

A partir del modelo de tres bandas de Kane [12], tenemos que las funciones de onda que representan a los electrones en la bandas de conducción de un semiconductor, si  $E_F \ll E_g$ , resultan:

$$|u_{\vec{k},\sigma}\rangle = |s, \sigma\rangle + i \left( \frac{E_F}{E_g} \frac{3E_g + 2\Delta}{3(E_g + 2\Delta)} \right)^{1/2} \left[ \frac{\vec{k} \cdot |\vec{R}, \sigma\rangle}{k_F} + \frac{i2\Delta}{(2\Delta + 3E_g)} \frac{\vec{S} \cdot (\vec{k} \times |\vec{R}, \sigma\rangle)}{\hbar k_F} \right] \quad (6.1)$$

donde el primer término es el que contiene la componente más importante de orientación de espín puesto que los otros poseen el factor  $(E_F/E_g)^{1/2}$ . Sin embargo, es la presencia de la mezcla de estados de polarización de espín la que permite la relajación del sistema mediante la interacción de Coulomb.

Si se calculan los elementos de matriz de dos funciones de onda de espín paralelos, resulta casi directo notar que:

$$\langle u_{\vec{k},\sigma} | u_{\vec{k},\sigma} \rangle \cong 1 \quad (6.2)$$

En cambio, al calcular el solapamiento entre dos funciones de onda de dos electrones de espín opuesto, el cálculo no resulta tan directo. Para obtener dichas expresiones debe tenerse en cuenta que  $\langle s | x \rangle = \langle s | y \rangle = \langle s | z \rangle = 0$ . Además deben usarse las relaciones

de conmutación entre los operadores de espín y los operadores de creación y destrucción de espín:

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k \quad S_+ = \frac{S_x + iS_y}{2} \quad S_- = \frac{S_x - iS_y}{2} \quad (6.3)$$

$$S_+|+\rangle = S_-|-\rangle = 0 \quad S_-|+\rangle = \hbar|-\rangle \quad S_+|-\rangle = \hbar|+\rangle \quad (6.4)$$

Empleando las ecuaciones (6.1), (6.3) y (6.4) obtenemos que el elemento de matriz resulta:

$$\langle u_{\vec{k},+} | u_{\vec{k}',-} \rangle = \frac{E_F}{E_g} \frac{\Delta (2E_g + \Delta)}{(\Delta + E_g)(2\Delta + 3E_g)} \frac{k_- k'_z - k_z k'_-}{k_F^2} \quad (6.5)$$

donde  $k_{\pm} = (k_x \pm i k_y)/2$ .

Algunas propiedades de estos coeficientes que se usarán luego son descritas a continuación. En primer lugar, si  $E_F \ll E_g$ :

$$\langle u_{\vec{k},\sigma} | u_{\vec{k},\sigma} \rangle \ll \langle u_{\vec{k},+} | u_{\vec{k}',-} \rangle \quad (6.6)$$

Por otro lado, si en la ecuación (6.5) que si se sustituye  $\vec{k} \rightarrow \vec{k} + \vec{k}'$ , se obtiene que:

$$\langle u_{\vec{k}+\vec{k}',+} | u_{\vec{k}',-} \rangle = \frac{E_F \Delta (2E_g + \Delta)}{E_g (\Delta + E_g)(2\Delta + 3E_g)} \frac{(k_- + k'_-)k'_z - (k_z + k'_z)k'_-}{k_F^2} = \langle u_{\vec{k},+} | u_{\vec{k}',-} \rangle \quad (6.7)$$

Por último, también es posible ver que :

$$|k_- k'_z - k_z k'_-|^2 = \left| \left( \vec{k} \times \vec{k}' \right) \cdot \hat{z} \right|^2 \quad (6.8)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left| \langle u_{\vec{k}+\vec{q},+} | u_{\vec{k},-} \rangle \right|^2 &= \left[ \frac{E_F \Delta (2E_g + \Delta)}{E_g (\Delta + E_g)(2\Delta + 3E_g)} \right]^2 \frac{|q_- k_z - q_z k_-|^2}{k_F^4} = \\ &= \left[ \frac{E_F \Delta (2E_g + \Delta)}{E_g (\Delta + E_g)(2\Delta + 3E_g)} \right]^2 \frac{q^2 k^2}{k_F^4} \sin^2 \theta_{qk} (1 - \sin^2 \theta_q \sin^2 \theta_k) \end{aligned} \quad (6.9)$$

## 6.2 Cálculo del tiempo de relajación

Para determinar el tiempo de relajación de la polarización de espín debe calcularse el promedio de las probabilidades de transición indicadas en las ecuaciones (2.5) y (2.18), resultando la expresión,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} = \frac{4\pi}{n_{ex} \hbar} \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{k}' \\ \vec{q}, \sigma}} f_{-}(\vec{k}) f_{\sigma}(\vec{k}') \left[1 - f_{+}(\vec{k} + \vec{q})\right] \left[1 - f_{\sigma}(\vec{k}' - \vec{q})\right] \delta\left[\frac{\hbar^2}{m^*} \vec{q} \cdot (\vec{k} - \vec{k}' + \vec{q})\right] \\ \left\{ \left| \langle \vec{k} + \vec{q}, + | \vec{k}, - \rangle \right|^2 V_q^2 + \left| \langle \vec{k}' - \vec{q}, \sigma | \vec{k}, - \rangle \langle \vec{k} + \vec{q}, + | \vec{k}', \sigma \rangle \right|^2 V_{\vec{k} - \vec{k}' + \vec{q}}^2 - \right. \\ \left. - 2 \operatorname{Re} \left[ V_q V_{\vec{k} - \vec{k}' + \vec{q}} \langle \vec{k} + \vec{q}, + | \vec{k}, - \rangle \langle \vec{k}' - \vec{q}, \sigma | \vec{k}, - \rangle \langle \vec{k} + \vec{q}, + | \vec{k}', \sigma \rangle \right] \right\} \quad (6.10) \end{aligned}$$

La contribución de la sumatoria de los términos directos de la inversión de espín de un electrón con espín  $-$  a otro con  $+$ , podemos escribirla, haciendo la suma sobre  $\sigma$ , como

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{k}' \\ \vec{q}}} \delta\left[\frac{\hbar^2}{m^*} (\vec{k} - \vec{k}' + \vec{q}) \cdot \vec{q}\right] \left| \langle \vec{q}, + | \vec{k}, - \rangle \right|^2 V_q^2 f_{-}(\vec{k}) \left[1 - f_{+}(\vec{k} + \vec{q})\right] f_{+}(\vec{k}') \left[1 - f_{+}(\vec{k}' - \vec{q})\right] + \\ + \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{k}' \\ \vec{q}}} \delta\left[\frac{\hbar^2}{m^*} (\vec{k} - \vec{k}' + \vec{q}) \cdot \vec{q}\right] \left| \langle \vec{q}, + | \vec{k}, - \rangle \right|^2 V_q^2 f_{-}(\vec{k}) \left[1 - f_{+}(\vec{k} + \vec{q})\right] f_{-}(\vec{k}') \left[1 - f_{-}(\vec{k}' - \vec{q})\right] = \\ = \sum_{\substack{\vec{k}, \vec{k}' \\ \vec{q}}} \delta\left[\frac{\hbar^2}{m^*} (\vec{k} - \vec{k}' + \vec{q}) \cdot \vec{q}\right] \left| \langle \vec{q}, + | \vec{k}, - \rangle \right|^2 V_q^2 f_{-}(\vec{k}) \left[1 - f_{+}(\vec{k} + \vec{q})\right] \cdot \\ \cdot \left\{ f_{+}(\vec{k}') \left[1 - f_{+}(\vec{k}' - \vec{q})\right] + f_{-}(\vec{k}') \left[1 - f_{-}(\vec{k}' - \vec{q})\right] \right\} \quad (6.11) \end{aligned}$$

Se estudiará ahora el término correspondiente al intercambio de la ecuación (6.10). Como la suma es sobre todos los valores de  $\vec{k}$ ,  $\vec{k}'$  y  $\vec{q}$ , es posible realizar la suma sobre  $\vec{q}' = \vec{k} - \vec{k}' + \vec{q}$ . Aplicando dicho cambio de variables y teniendo en cuenta el resultado de la ecuación (6.7), dicho término resulta,

$$\sum_{\substack{\vec{k}, \vec{k}' \\ \vec{q}, \sigma}} f_{-}(\vec{k}) f_{\sigma}(\vec{k}') \left[1 - f_{+}(\vec{k} + \vec{q})\right] \left[1 - f_{\sigma}(\vec{k}' - \vec{q})\right] \delta\left[\frac{\hbar^2}{m^*} \vec{q} \cdot (\vec{k} - \vec{k}' + \vec{q})\right].$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left| \langle \vec{k}' - \vec{q}, \sigma | \vec{k}, - \rangle \langle \vec{k} + \vec{q}, + | \vec{k}', \sigma \rangle \right|^2 V(\vec{k} - \vec{k}' + \vec{q})^2 = \\
= & \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \vec{q}} f_-(\vec{k}) \left[ 1 - f_+(\vec{k}' + \vec{q}') \right] \delta \left[ \frac{\hbar^2}{m^*} (\vec{k}' - \vec{k} + \vec{q}') \cdot \vec{q}' \right] \cdot \\
& \cdot f_+(\vec{k}') \left[ 1 - f_+(\vec{k} - \vec{q}') \right] \left| \langle \vec{q}', + | \vec{k}, - \rangle \right|^2 V(q')^2 + \\
+ & \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \vec{q}} f_-(\vec{k}) \left[ 1 - f_+(\vec{k}' + \vec{q}') \right] \delta \left[ \frac{\hbar^2}{m^*} (\vec{k}' - \vec{k} + \vec{q}') \cdot \vec{q}' \right] \cdot \\
& f_-(\vec{k}') \left[ 1 - f_-(\vec{k} - \vec{q}') \right] \cdot \left| \langle \vec{q}', + | \vec{k}', - \rangle \right|^2 V(q')^2 \tag{6.12}
\end{aligned}$$

donde si en la primer suma se cambia  $\vec{q}'$  por  $-\vec{q}'$ , dicha suma no se altera, puesto que la misma es sobre todos los posibles vectores de onda. Entonces, dicho término se transforma en el segundo de la ecuación (6.11). Análogamente, en el segundo término de la ecuación anterior, si se invierten los nombres de  $\vec{k}$  y  $\vec{k}'$ , obtenemos el primer término de la ecuación (6.11). Como consecuencia, el término directo resulta igual al término de intercambio al hacer la suma sobre todos los vectores de onda. Esto contradice lo que Boguslawski [11] aseguraba que el término de intercambio era la cuarta parte del término directo.

Debido a la simetría el término de interferencia de la ecuación se anula al sumar sobre todos impulsos [13].

Entonces la expresión de la inversa del tiempo de relajación  $T_1$  resulta,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_1} = & \frac{8\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \vec{q}} \delta \left[ \frac{\hbar^2}{2m^*} \vec{q} \cdot (\vec{k} - \vec{k}' + \vec{q}) \right] V_q^2 \left| \langle \vec{k} + \vec{q}, - | \vec{k}, + \rangle \right|^2 \cdot \\
& \cdot \left\{ f_+(k) \left[ 1 - f_-(\vec{k} + \vec{q}) \right] - f_+(k) \left[ 1 - f_-(\vec{k} + \vec{q}) \right] \right\} \cdot \\
& \cdot \left\{ f_+(k') \left[ 1 - f_+(\vec{k}' - \vec{q}) \right] + f_-(k') \left[ 1 - f_-(\vec{k}' - \vec{q}) \right] \right\} \tag{6.13}
\end{aligned}$$

Si ahora se pasa la suma al continuo, reemplazando los resultados de las ecuaciones (6.9), (2.10) y (2.13), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_1} = & \frac{8\pi}{\hbar n_{ex}} \left( \frac{V}{2\pi} \right)^3 \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} k^2 \sin \theta_k dk d\theta_k d\phi_k \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} q^2 \sin \theta_q dq d\theta_q d\phi_q \\
& \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} k'^2 \sin \theta_{k'} dk' d\theta_{k'} d\phi_{k'} \delta \left[ \frac{\hbar^2}{2m^*} \vec{q} \cdot (\vec{k} - \vec{k}' + \vec{q}) \right] \left[ \frac{E_F \Delta (2E_g + \Delta)}{E_g (\Delta + E_g)(2\Delta + 3E_g)} \right]^2 V_q^2
\end{aligned}$$

$$\frac{k^2 k'^2}{k_F^4} \sin^2 \theta_{kk'} (1 - \sin^2 \theta_k \sin^2 \theta_{k'}) \left\{ f_+(k) \left[ 1 - f_-(\vec{k} + \vec{q}) \right] - f_-(k) \left[ 1 - f_+(\vec{k} + \vec{q}) \right] \right\} \cdot \left\{ f_+(k') \left[ 1 - f_+(\vec{k}' - \vec{q}) \right] + f_-(k') \left[ 1 - f_-(\vec{k}' - \vec{q}) \right] \right\} \quad (6.14)$$

Debido a la simetría del sistema, las integrales no pueden depender de dos de los ángulos azimutales de cualquiera de los tres momentos. Por otro lado, la orientación de los ejes  $\hat{z}$  para dos de los momentos también puede ser elegida arbitrariamente con lo cual haciendo un cambio de variables conveniente, evitando de esta forma hacer otras dos de las integrales. Además, empleando la función  $\delta(E_f - E_i)$  se realiza otra de las integrales. Por lo tanto, restan sólo resolver cuatro integrales, quedando la expresión:

$$\frac{1}{T1} = \left[ \frac{\Delta (2E_g + \Delta)}{E_g(\Delta + E_g)(2\Delta + 3E_g)} \right]^2 \frac{\hbar e^4}{\pi^3} \int_0^\infty dk \int_0^\infty dq \int_{-1}^1 d(\cos \theta_q) \int_0^\infty dk' k' \frac{k^4 q^3 k' (1 - \cos^2 \theta_q)}{(q^2 + k_s^2)^2} \left\{ f_+(k) \left[ 1 - f_-(\sqrt{k^2 + q^2 + 2kq \cos \theta_q}) \right] - f_-(k) \left[ 1 - f_+(\sqrt{k^2 + q^2 + 2kq \cos \theta_q}) \right] \right\} \left\{ f_+(k') \left[ 1 - f_+(\sqrt{k'^2 - q^2 - 2kq \cos \theta_q}) \right] + f_-(k') \left[ 1 - f_-(\sqrt{k'^2 - q^2 - 2kq \cos \theta_q}) \right] \right\} \quad (6.15)$$

# Bibliografía

- [1] J.M. Kikkawa and D.D. Awschalom, *Resonant spin Amplification in n-type GaAs*, Phys. Rev. Lett. 80, 4313-6 (1998).
- [2] J.M. Kikkawa, I.P.Smorchkova, N. Samarth, D. D. Awschalom, *Room temperature spin memory in two dimensional electron gases*, Science 277, 1284-7 (1997).
- [3] D.D. Awschalom and J.M. Kikkawa, *Electron spin and optical coherence in semiconductors*, Physics Today 52, 33-8 (1999).
- [4] I. Malajovich, J. M. Kikkawa, J. J. Berry, N. Samarth, D.D. Awschalom, *Coherent transfer of spin through a semiconductor heterointerface*, Phys. Rev. Lett. 84, 1015-1018 (2000).
- [5] I.P. Smorchkova, N. Samarth, J.M. Kikkawa, D.D. Awschalom, *Spin transport and localization in a magnetic two-dimensional electron gas*, Phys. Rev. Lett. 78, 3571-4 (1997).
- [6] G.L. Bir, A.G. Aranov, G.E. Pikus, *Spin relaxation of electrons due to scattering by holes*, Sov. Phys. JETP 42, 4 (1975).
- [7] A.W. Overhauser, *Paramagnetic relaxation in metals*, Phys. Rev. 89, 4 (1953).
- [8] R.J. Elliot, *Theory of the effect of spin-orbit coupling on magnetic resonance in some semiconductors*, Phys. Rev. 96, 2 (1954).

- [9] M.I. D'yakonov, V.I. Perel', *Spin orientation of electrons associated with the absorption of light in semiconductors*, Sov. Phys. JETP 33, 5 (1971).
- [10] P.H. Song, K.W. Kim *Spin relaxation of conduction electrons in bulk III-V semiconductors*, Phys. Rev. B 66, 035207 (2002).
- [11] P. Boguslawski *Electron-electron spin-flip scattering and spin relaxation time in III-V and II-VI semiconductors*, Solid State Comm., 33, 389 (1980).
- [12] W. Zawadzki, W. Szymańska, *Elastic Electron Scattering in InSb-Type Semiconductors*, Phys. Status Solidi B 45, 415 (1971).
- [13] M.O. Vassell, A.K. Ganguly, E.M. Conwell, *Angular dependence of Matrix Elements for Scattering in III-V Compounds*, Phys. Rev. B 4, 948-950 (1970).
- [14] N. Ashcroft, N. Mermin, *Solid State Physics*, Cornell University, Saunders College (1976).