

Modelado numérico de flujos astrofísicos

Dr. Pablo F. Velázquez

1 Física de ondas de choque

Para deducir el comportamiento de las variables hidrodinámicas cuando atraviesan la superficie de una discontinuidad (onda de choque o tangencial), vamos a partir de las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía (en forma euleriana):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} = \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \nabla p = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}(e + p)) = Q \quad (3)$$

donde $\mathbf{\Pi} = \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{I}$ es el tensor de momentos (\mathbf{I} es la identidad), $e = \rho u^2/2 + p/(\gamma - 1)$ es la densidad total de energía (cinética más térmica, siendo γ el cociente de calores específicos) y Q es un término fuente de ganancia y/o pérdida de energía.

Para determinar el salto que las magnitudes hidrodinámicas sufren al atravesar la onda de choque, se considera un volumen cilíndrico como el de la figura, en el cual se integran las ecuaciones 1, 2 y 3. Como este volumen se lo considera pequeño, el resultado de la integración es nulo. Además se anulan las derivadas parciales respecto al tiempo, porque la escala característica de tiempo es menor al tiempo de cruce. Entonces las ecuaciones anteriores quedan de la forma:

$$\oint_V \nabla \cdot \mathbf{\Phi} dV = 0 \quad (4)$$

donde $\mathbf{\Phi}$ representa los flujos de masa, momento y energía. La ecuación (4) queda tras aplicar el teorema de Gauss como:

$$\oint_{S(V)} \Phi \cdot \hat{\mathbf{n}} dV = 0 \quad (5)$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ la normal a la superficie del cilindro. Como el volumen del cilindro se lo hace tender a cero, esto hace que la integral de la superficie tenga sentido en las tapas del cilindro, resultando la ecuación (5):

$$(\Phi_1 - \Phi_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = [\Phi] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (6)$$

A partir de la ecuación (6) obtenemos para el flujo de masa:

$$[\rho \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \rightarrow [\rho u_n] = 0 \quad (7)$$

que dice que el flujo de masa normal a la superficie de discontinuidad se conserva.

Para el flujo de momento, obtenemos dos condiciones

$$[\rho u_n^2 + p] = 0 \quad (8)$$

que representa la conservación del flujo de momento normal a la superficie y

$$[\rho \mathbf{u}_\perp u_n] = 0 \rightarrow [\mathbf{u}_\perp] = 0 \quad (9)$$

la que nos dice que la velocidad tangencial a la superficie no cambia en la discontinuidad.

De la conservación del flujo de energía tenemos:

$$[\mathbf{u}(e + p)] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (10)$$

Dividiendo la ecuación (10) por (7) se arriba a la siguiente expresión:

$$\left[\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \right] = 0 \quad (11)$$

Las ecuaciones (7), (8), (9) y (11) se denominan condiciones de salto o de Rankine-Hugoniot. Para el caso de que el flujo no atraviesa la superficie, es decir $u_n = 0$, de la ec.(8) se tiene que la presión es continua, es decir $[p] = 0$. A este tipo de discontinuidad se la llama de contacto o tangencial.

1.1 Choque normal adiabático

Elegimos un sistema donde la velocidad sólo es normal al choque. Entonces las ecuaciones (7), (8) y (11) se reducen a:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (12)$$

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \quad (13)$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (14)$$

donde $h = \gamma p / ((\gamma - 1)p)$ es la entalpía, y los subíndices 1 y 2 denotan las cantidades pre y post-chocadas. La ecuación (13) puede ser reescrita teniendo en cuenta la ec.(12) resultando:

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \frac{\rho_1^2}{\rho_2} u_1^2 + p_2 \quad (15)$$

Multiplicando a la ec.(14) por $2(\gamma - 1)\rho_2$ y teniendo en cuenta la ec.(15), se arriba a una ecuación cuadrática en ρ_2 :

$$\rho_2^2 \left[(\gamma - 1)u_1^2 + 2\gamma \frac{p_1}{\rho_1} \right] - \rho_2 [2\gamma(\rho_1 u_1^2 + p_1)] + (\gamma + 1)\rho_1^2 u_1^2 = 0 \quad (16)$$

cuyas solución distinta de la trivial ($\rho_2 = \rho_1$) es¹:

$$\rho_2 = \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2/M_1^2} \right] \rho_1 \quad (17)$$

en donde empleamos la definición del número de Mach $M_1 = u_1/c_1$, siendo $c_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$ la velocidad de sonido prechoque.

Los “saltos” en velocidad y presión están determinados por:

$$u_2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{(\gamma + 1)M_1^2} u_1 \quad (18)$$

¹Ej.1: hallar esta ecuación y sus soluciones

$$p_2 = \frac{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}{\gamma + 1} p_1 \quad (19)$$

Para el caso de choque fuerte, es decir cuando $M_1^2 \gg 1$ las ecs.(17,18,19) se reducen a

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (20)$$

y

$$p_2 = \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} p_1 = \frac{2\rho_1 u_1^2}{\gamma + 1} \quad (21)$$

2 Ecuaciones de dinámica de gases: implementación en un algoritmo

Partamos de las ecs.(1,2,3). En cartesianas 1D, estas tres ecuaciones se pueden escribir como una única ecuación vectorial

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

donde \mathbf{U} , \mathbf{F} son los vectores de las denominadas variables de integración y de sus flujos, respectivamente, los cuales se expresan de la siguiente manera:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(e + p) \end{pmatrix} \quad (23)$$

En 3D, las ecuaciones (22,23) se convierten en:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0 \quad (24)$$

y

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(e+p) \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(e+p) \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ w(e+p) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

donde \mathbf{U} , \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} son los vectores de las variables de integración, del flujo en x , del flujo en y , y del flujo en z , respectivamente. En las ecs.(25) u , v , w simbolizan las componentes de la velocidad en la dirección x , y , z , respectivamente. Las ecs.(22,24) son válidas en cartesianas donde se hizo uso de la identidad vectorial $\nabla p = \nabla \cdot (p\mathbf{I})$.

Si se tiene un problema que posea simetría de revolución, como es el caso de un jet, aunque el problema en si sea tridimensional, se lo puede reducir a uno en 2D, pero axisimétrico. Para ese caso expresaremos las ecs.(1,2,3) en coordenadas cilíndricas (x y r , siendo x el eje de simetría):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} = -\frac{\rho v}{r} \quad (26)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial r} = -\frac{\rho uv}{r} \quad (27)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial r} = -\frac{\rho v^2}{r} \quad (28)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial(u(e+p))}{\partial x} + \frac{\partial(v(e+p))}{\partial r} = -\frac{\rho ev}{r} + Q \quad (29)$$

Las ecs. (26–29) pueden expresarse en forma semejante a la ec.(24):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial r} = \mathbf{S} \quad (30)$$

Los vectores \mathbf{U} , \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{S} se escriben como

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e + p) \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e + p) \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\rho v/r \\ -\rho uv/r \\ -\rho v^2/r \\ -ev/r + Q \end{pmatrix} \quad (31)$$

En este caso u y v son las velocidades a lo largo de \hat{x} (dirección axial) y \hat{r} (dirección radial), respectivamente. \mathbf{F} , \mathbf{G} , son los flujos respectivos en la dirección axial y radial, mientras que \mathbf{S} es un término fuente, que es resultado de emplear este sistema de coordenadas (son factores geométricos en su mayoría con excepción de Q que representa un término de ganancia y/o pérdida de energía).

Las ecs.(22,24,30) son las que se pueden integrar numéricamente, ya que son fáciles de poner en forma de un cálculo iterativo. Como mencionamos anteriormente, \mathbf{U} contiene las variables que son numéricamente integradas. A partir de ellas se pueden calcular las denominadas variables primitivas, que también la podemos poner en un arreglo. Para el caso 2D axisimétrico, tenemos que el vector de las variables primitivas se escribe como:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix} \quad (32)$$

3 Ecuación de Burger

Antes de ver como atacar el problema de discretizar las ecuaciones de Euler, empecemos por una más sencilla, la ecuación de Burger invíscida, donde podremos aplicar distintos métodos para resolverla numéricamente.

La ecuación de Burger es la siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (33)$$

que se puede deducir de las ecuaciones de dinámica de gases bajo ciertas condiciones. Veamos como hacerlo y para ello desarrollemos de la ecuación de conservación de momento (22):

$$u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

reagrupando términos en la ec.(34) obtenemos:

$$u \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (35)$$

El paréntesis del primer término es cero porque es la ecuación de continuidad. Dividiendo por ρ lo que queda, el término $\rho^{-1} \partial p / \partial x$ es despreciable para el caso en que la presión térmica resulte mucho menor que la hidrodinámica (o “ram pressure” en inglés), es decir $p \ll \rho u^2$. En es caso la ecuación (35) se reduce a la ec.(33), la ecuación de Burger. En otras palabras, la ecuación de Burger es el caso de las ecuaciones de fluidos pero para el caso hipersónico con $M = u/c_s \gg 1$, la cual implica $u \gg \sqrt{p/\rho} \simeq c_s$.

Ahora si escribamos la ec.(33) en la forma vectorial de la ec.(22):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (36)$$

donde $U = u$ y $F = u^2/2$. Si se va a estudiar el caso subsónico, esto $u \ll c_s$, la ec.(36) se la puede resolver usando métodos espectrales. Como nosotros queremos ver el caso contrario ($u \gg c_s$), el método adecuado es el de diferencias o volúmenes finitos.

4 Métodos en diferencias finitas

4.1 Método de Lax (o de Lax-Friedrichs)

Este método es de primer orden en espacio y tiempo. La ec.(36) queda en forma discretizada de la siguiente manera:

$$U_i(t + \Delta t) = \frac{U_{i+1}(t) + U_{i-1}(t)}{2} - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (F_{i+1}(t) - F_{i-1}(t)) \quad (37)$$

o empleando otra notación, donde la parte temporal la reemplazamos por un supraíndice n :

$$U_i^{n+1} = \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) \quad (38)$$

El método de Lax es estable de acuerdo al criterio de Courant. Entonces implementemos un algoritmo para la ec.(37) ²:

- 1. Definamos tres arreglos o vectores U , UP y F de dimensiones Nx , para todo el dominio espacial. U representa la variable de integración a tiempo t , mientras que UP lo es para el avance del tiempo en Δt . F es el arreglo del flujo.
- 2. Condiciones iniciales. Elegimos un dominio x de $[0, 1000]$, con $\Delta x = 1$. En la región $0 \leq x \leq 10$ imponemos un valor $u = u_1 = 2$. Para $x > 10$ tenemos $u = u_2 = 1$. La variable u tiene entonces un perfil tipo “escalón”, el cual se mantiene desplazándose a la derecha con velocidad $v = (u_1 + u_2)/2$. El perfil inicial lo guardamos en el vector U
- 3. Criterio de Courant para determinar el paso en el tiempo Δt . Este se calcula como

$$\Delta t = Dt = \min \left(\frac{\Delta x}{U(i)} \right) N_C \quad (39)$$

con i en el rango $0, Nx$, y N_c es el número de Courant que debe ser menor que la unidad.

- 4. Cálculo del flujo $F(i) = U^2(i)/2$ para todo i
- 5. Integración temporal o paso en el tiempo. Para $2 \leq i \leq Nx - 1$ se calcula:

$$UP(i) = \frac{U(i-1) + U(i+1)}{2} - \frac{Dt}{2\Delta x} [F(i+1) - F(i-1)] \quad (40)$$

- 6. imponer condiciones de frontera.

$$UP(1) = U(1), \text{ “inflow” o flujo de entrada} \quad (41)$$

²Ej.: aplicar este criterio al método de Lax para el caso de la ecuación de onda $\partial u/\partial t + v\partial u/\partial x = 0$, con $v = cte$, y demostrar que es estable.

$$UP(Nx) = UP(Nx - 1), \text{ “outflow” o salida libre} \quad (42)$$

- 7. Se termina el paso en el tiempo y se copia la variable de integración evolucionada en el vector U , es decir $U(i) = UP(i)$, y se vuelve a elegir Dt , y se repiten los pasos.

4.2 Método de Lax-Wendroff

4.3 Método de Richtmyer

Es un método alternativo al anterior, y tiene la ventaja de que no hay que calcular jacobianos, siendo más competitivo. Este método hace la integración temporal en dos pasos. A uno se lo llama “predictor”, y al otro “corrector”.

El “predictor” calcula el vector U a la mitad del paso en el tiempo (por eso “predice”) de la siguiente manera:

$$U_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[\left(U_{i+1}^n + U_i^n \right) - \frac{Dt}{Dx} (F_{i+1}^n - F_i^n) \right] \quad (43)$$

El paso predictor no es otra cosa que el método de Lax, pero centrado en $x_{i+1/2}$. El “corrector” es el método de “leapfrog”, y hace el paso completo del tiempo como:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{Dt}{Dx} (F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}) \quad (44)$$

4.4 Método de MacCormack

Es otro método del tipo “predictor-corrector” que se define como sigue:

$$\bar{U}_i = U_i^n - \frac{Dt}{Dx} (F_{i+1}^n - F_i^n)$$

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\left(U_i^n + \bar{U}_i \right) - \frac{Dt}{Dx} (\bar{F}_i - \bar{F}_{i-1}) \right]$$

que se parece al método de Richtmyer pero invirtiendo el predictor y el corrector.

Otra manera de ver como aplicar este método es la que se muestra a continuación:

$$\bar{U}_i = U_i^n - \frac{Dt}{Dx} (F_{i+1}^n - F_i^n) \quad (45)$$

$$\bar{\bar{U}}_i = \bar{U}_i - \frac{Dt}{Dx} (\bar{F}_i - \bar{F}_{i-1}) \quad (46)$$

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (U_i^n + \bar{\bar{U}}_i) \quad (47)$$

La ecuación (45), que es el predictor, es una diferencia finita adelantada, mientras que la (46), que es el paso corrector, es atrasada. Este orden del predictor corrector puede ser invertido obteniendo:

$$\bar{U}_i = U_i^n - \frac{Dt}{Dx} (F_i^n - F_{i-1}^n) \quad (48)$$

$$\bar{\bar{U}}_i = \bar{U}_i - \frac{Dt}{Dx} (\bar{F}_{i+1} - \bar{F}_i) \quad (49)$$

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (U_i^n + \bar{\bar{U}}_i) \quad (50)$$

Ocurre que el método de MacCormack posee una dirección privilegiada. Las ecuaciones (45-46) favorecen las perturbaciones que se propagan desde la izquierda, mientras que las ecs. (48-49) favorecen las ondas que vienen de la derecha. Para evitar este “bias” o sesgo, el orden de derivadas adelantadas y atrasadas se invierte en cada paso del tiempo.

4.4.1 Viscosidad de Von Neumann

Los métodos de MacCormack y otros de 2do orden, siempre producen oscilaciones alrededor de las discontinuidades. Para minimizarlos se emplea la viscosidad artificial o de von Neumann. Para entenderla partamos de la ecuación de Burger viscosa:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (51)$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad definido como el producto entre el camino libre medio y la velocidad del sonido (λc_s). La ec.(51) se discretiza de la siguiente manera:

$$u_i(t + \Delta t) = u_i(t) + \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_i^2}{2} \right) \right]_i + \mu \Delta t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i \quad (52)$$

la derivada segunda del último término se expande como sigue:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right] = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-1/2} \right] \quad (53)$$

Poniendo la ec.(53) en (51) se tiene:

$$u_i(t + \Delta t) = u_i(t) + \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_i^2}{2} \right) \right]_i + \eta (u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) \quad (54)$$

donde $\eta = (\mu \Delta)/(\Delta x)^2$ es la difusión. Como se implementa esto en el algoritmo?. Luego de cada paso en el tiempo, a cada punto se le agrega el término difusivo o de viscosidad artificial, imponiendo un $\eta < 0.5$ en 1D. La viscosidad artificial tiende a suavizar toda discontinuidad que halla, pero sería bueno que solo actuase donde fuese necesario. Se puede implementar un corrector de viscosidad que se basa en aplicar algunos criterios que definen si es necesario o no utilizar la difusión en determinado lugar.

Se definen $q_i = u_{i+1} - u_i$ y $q_{i-1} = u_i - u_{i-1}$. Si el producto de estas cantidades es negativo, quiero decir que en x_i existe un pico o un valle, es decir un cambio de pendiente.

4.5 Flux Vector Splitting

Supongamos que el flujo como función de las U puede escribirse como:

$$F(U) = F^+(U) + F^-(U) \quad (55)$$

donde los autovalores o valores característicos de dF^+/dU son no-negativos (definida positiva) y los de dF^-/dU no-positivos (definida negativa), es decir:

$$\frac{dF^+}{dU} \geq 0, \quad \frac{dF^-}{dU} \leq 0 \quad (56)$$

A esto se lo llama flux vector splitting. Con esta notación, la ecuación de conservación vectorial quedaría:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^+}{\partial x} + \frac{\partial F^-}{\partial x} = 0 \quad (57)$$

El 2do y el 3er término del lado izquierdo pueden ser resueltos con cualquier método. La ec.(57) tiene la ventaja de que puede resolver por igual ondas que provengan de la izquierda o derecha.

También podemos encarar esto usando el “wave speed splitting”. Supongamos que el Jacobiano del flujo los podemos expresar en forma análoga a la ec.(55):

$$A(U) = A^+(U) + A^-(U), \text{ con } A^+ \geq 0 \text{ y } A^- \leq 0 \quad (58)$$

Entonces la ecuación de conservación vectorial queda:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A^+ \frac{\partial U}{\partial x} + A^- \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (59)$$

Las matrices A^+ y A^- se obtienen separando los autovalores de A en positivos y negativos, es decir las velocidades características λ_i las separamos como sigue (por eso es “wave speed splitting”):

$$\lambda_i = \lambda_i^+ + \lambda_i^-, \text{ con } \lambda_i^+ \geq 0 \text{ y } \lambda_i^- \leq 0 \quad (60)$$

Sea Λ la matriz diagonal de las velocidades características, a la cual se le puede aplicar la misma separación

$$\Lambda = \Lambda^+ + \Lambda^-, \text{ donde } \Lambda^+ \geq 0 \text{ y } \Lambda^- \leq 0 \quad (61)$$

Las matrices Λ y el Jacobiano A están relacionadas por:

$$Q_A^{-1} A Q_A = \Lambda \quad (62)$$

donde Q_A es una matriz cuya expresión es la que sigue:

$$Q_A = \begin{bmatrix} 1 & & -\frac{\rho}{2c} \\ u & \frac{\rho}{2c}(u+c) & -\frac{\rho}{2c}(u-c) \\ \frac{u^2}{2} & \frac{\rho}{2c}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} + cu\right) & -\frac{\rho}{2c}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} - cu\right) \end{bmatrix} \quad (63)$$

y

$$Q_A^{-1} = \frac{\gamma - 1}{\rho c} \begin{bmatrix} \frac{\rho}{c} \left(-\frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} \right) & \frac{\rho}{c} u & -\frac{\rho}{c} \\ \frac{u^2}{2} - \frac{cu}{\gamma-1} & -u + \frac{c}{\gamma-1} & 1 \\ -\frac{u^2}{2} - \frac{cu}{\gamma-1} & u + \frac{c}{\gamma-1} & -1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

En general “flux vector splitting” y “wave speed splittin” son diferentes. Pero para la ecuaciones de Euler, que es lo que nos interesa, el vector de flujos F es una función homogénea de primer orden de U , es decir

$$F(U) = \frac{dF}{dU} U = AU \quad (65)$$

De esta manera, el “flux vector splitting” puede escribirse como:

$$F^+ = A^+ U = Q_A^{-1} \Lambda^+ Q_A U \quad (66)$$

$$F^- = A^- U = Q_A^{-1} \Lambda^- Q_A U \quad (67)$$

que luego de mucha álgebra llegamos a:

$$F^\pm = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho \lambda_1^\pm \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{u^2}{2} \end{pmatrix} + \frac{\rho}{2\gamma} \lambda_2^\pm \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \\ \frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} + cu \end{pmatrix} + \frac{\rho}{2\gamma} \lambda_3^\pm \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \\ \frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} - cu \end{pmatrix} \quad (68)$$

4.5.1 “Flux vector splitting” de Van Leer

Los puntos sónicos son puntos “naturales” para “separar el flujo”. En las ecuaciones de Euler, el número de Mach M indica estos puntos, en particular ellos ocurren a $M = u/c = 0 = \pm 1$. Van Leer basa su método de “splitting” en separar el número de Mach. El vector de flujos F puede expresarse en términos de M , resultando:

$$F = \begin{pmatrix} \rho c M \\ \frac{\rho c^2}{\gamma} (\gamma M^2 + 1) \\ \rho c^3 M \left(\frac{M^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \right) \end{pmatrix} \quad (69)$$

La componente F_1 depende linealmente de M . Entonces el flujo de masa puede ser separado en dos cuadráticas:

$$M^+ = \begin{cases} 0 & M \leq -1, \\ \left(\frac{M+1}{2}\right)^2 & -1 < M < 1, \\ M & M \geq 1. \end{cases} \quad (70)$$

$$M^- = \begin{cases} M & M \leq -1, \\ \left(-\frac{M-1}{2}\right)^2 & -1 < M < 1, \\ 0 & M \geq 1. \end{cases} \quad (71)$$

Las ecuaciones (70) y (71) implican:

$$F_1^\pm = \rho c M^\pm \quad (72)$$

El flujo de momento F_2 puede separarse como:

$$F_2^\pm = \frac{\rho c^2}{\gamma} (\gamma M^2 + 1)^\pm, \quad (73)$$

donde

$$F_2^+ = \begin{cases} 0 & M \leq -1, \\ \frac{F_1^+}{\gamma} ((\gamma - 1)u + 2c) & -1 < M \leq 1, \\ F_2 & M > 1 \end{cases} \quad (74)$$

$$F_2^- = \begin{cases} F_2 & M \leq -1, \\ \frac{F_1^-}{\gamma} ((\gamma - 1)u - 2c) & -1 < M \leq 1, \\ 0 & M > 1 \end{cases} \quad (75)$$

Para el flujo de energía, la separación resulta:

$$F_3^+ = \begin{cases} 0 & M \leq -1, \\ \frac{1}{2(\gamma+1)(\gamma-1)} F_1^+ ((\gamma - 1)u + 2c)^2 & -1 < M \leq 1, \\ F_3 & M > 1 \end{cases} \quad (76)$$

$$F_3^- = \begin{cases} F_3 & M \leq -1, \\ \frac{1}{2(\gamma+1)(\gamma-1)} F_1^- ((\gamma - 1)u - 2c)^2 & -1 < M \leq 1, \\ 0 & M > 1 \end{cases} \quad (77)$$

Finalmente, y como resumen se puede expresar la separación completa como:

$$F^{\pm} = \pm \frac{\rho c}{4} (M \pm 1)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(\gamma-1)u \pm 2c}{\gamma} \\ \frac{((\gamma-1)u \pm 2c)^2}{2(\gamma+1)(\gamma-1)} \end{pmatrix} \quad (78)$$

5 Bibliografía

- “Computational Fluid Dynamics. The basics with applications”, John D. Anderson Jr., 1995, McGraw-Hill.
- “Computational Fluid Dynamics”, T. J. Chung, 2002, Cambridge University Press.
- “Computational Gasdynamics”, C.B. Laney, 1998, Cambridge University Press.