Laboratorio de Física 1 (BG)

Guía 2: Mediciones indirectas y diferencias significativas.

1. Objetivos

Tratamiento de incertezas en mediciones de magnitudes que se obtienen en forma indirecta. Criterio para comparar distintas mediciones de una misma magnitud.

2. Introducción

No siempre se cuenta con un instrumento para medir en forma directa la magnitud requerida, sino que ésta se tiene que derivar de algunas otras magnitudes medidas en forma directa. Es decir que existirá alguna relación funcional entre las magnitudes medidas en forma directa y la que se desea obtener, dependiendo del experimento que se realice.

A partir de ahora nos enfrentaremos muchas veces con este problema en el laboratorio a la hora de decidir cómo medir una magnitud, incluso en los experimentos más simples. En ese caso habrá que tener en cuenta que la validez de las hipótesis del método utilizado condicionarán el resultado.

Por ejemplo, si queremos medir el volumen de un cuerpo cuya forma se aproxima razonablemente a alguna forma geométrica regular (esfera, cubo, etc.), se podría obtener calculando dicho volumen a partir de la medición directa de longitudes (el diámetro, un lado, etc). ¿Pero son realmente esos cuerpos una esfera o un cubo perfecto?

Cuando medimos una magnitud en forma directa, obtenemos como resultado de la medición un rango de valores, determinado con un valor medio y una incerteza. Por ejemplo: $x_o \pm \Delta x$ (donde: x_o es el valor medio *y* Δx la incerteza*)* significa que podemos asegurar que la magnitud medida está contenida en el rango $(x_o - \Delta x\ ,\ x_o + \Delta x)$ con un nivel de confianza de aproximadamente el 70 %.

Una medición indirecta también tendrá un valor medio y una incerteza. ¿ Cómo los obtenemos? Las incertezas de las mediciones directas deberían influir o propagarse sobre el resultado de la medición indirecta. ¿La incerteza de la medición indirecta debería depender sólo de las incertezas de las mediciones directas o también de la relación entre estas magnitudes?

Por otro lado, si medimos una misma magnitud por diferentes métodos, obtendremos diferentes resultados de cada medición, es decir, obtendremos diferentes valores medios e incertezas. ¿Cómo las comparamos?. ¿Cómo podemos determinar si dos resultados son equivalentes o son distintos?

Mediante experimentos simples, en esta práctica aprenderemos las herramientas necesarias para obtener la incerteza de una medición indirecta a partir de mediciones directas de magnitudes independientes y para comparar resultados de una misma magnitud procedentes de experimentos diferentes.

3. Actividades

La práctica consiste en medir el volumen de un cuerpo al menos por tres métodos distintos. Recordar que el método involucra no sólo la elección de los instrumentos de medición a utilizar sino también el diseño del experimento. ¿Qué métodos utilizarías? ¿Qué suposiciones harías en cada caso para que el método sea razonablemente válido?

3.1 Preguntas para pensar y discutir

- ¿Todos los métodos que utilizaron son indirectos?
- Si utilizaron valores tabulados para alguno de los experimentos, ¿qué incerteza le asignaron?
- ¿Se obtuvo el mismo resultado mediante los distintos métodos utilizados? ¿Cómo los compararon?
- ¿Cuál resultado dirías que es el más preciso? ¿y el más confiable? ¿Por qué?
- Si tuviesen que informar un único valor como resultado de la magnitud que midieron:

  Suponiendo que todos los resultados son comparables, ¿Qué valor informarían? ¿Por qué?

  Suponiendo que los resultados NO son comparables, ¿Qué valor informarían? ¿Por qué?

- ¿Por qué se pide que las magnitudes involucradas sean independientes? ¿Cómo influiría sobre el resultado si no lo fueran?

4. Apéndice: Propagación de incertezas

Se puede obtener en forma indirecta la magnitud W, midiendo en forma directa las magnitudes *x, y, z,* etc. independientes entre sí, mediante una función *f (x, y, z, ...)* que las relacione tal que $W = f(x, y, z, ...)$.

Entonces a partir de las mediciones directas, conocemos los valores:

$$x_o \pm \Delta x$$
$$y_o \pm \Delta y$$
$$z_o \pm \Delta z$$
$$\ldots$$

se puede obtener en forma indirecta la magnitud $W_o \pm \Delta W$ siendo:

$$W_o = f(x_o, y_o, z_o, ...) \qquad (1)$$

$$\Delta W = \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o, ...) \cdot \Delta x \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o, ...) \cdot \Delta y \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o, ...) \cdot \Delta z \right]^2 + ... \right\}^{1/2} \qquad (2)$$

Donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o, ...)$ es la derivada parcial de f con respecto a *x*, que se obtiene considerenado a *x* como la única variable y al resto (*y, z,* …) como constantes. Notar que recién después de calcular la derivada parcial de la función, se evalúa dicha expresión en los valores medios (x_o, y_o, z_o, …). De la misma forma, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o, ...)$ es la derivada de *f* con respecto a la variable *y*, considerando al resto (*x, z,* …) constantes, etc.

La expresión (2) se conoce como *fórmula de propagación de errores*. Es válida siempre que las mediciones de *x, y, z,…* sean independientes (*independencia* significa que conocer la incerteza de la magnitud x no nos da ninguna información acerca de la incerteza de la magnitud y; y es lo que ocurre siempre que medimos ambas magnitudes realizando experimentos independientes). La expresión (2) es una fórmula aproximada para ΔW, que es válida cuando las derivadas parciales de f de orden superior son despreciables frente a la primer derivada parcial (en general, estaremos dentro de las hipótesis de validez de esta aproximación).

4.1 Ejemplos

a) Si se quiere medir el área S de una mesa rectangular de lados $A_o \pm \Delta A$ y $B_o \pm \Delta B$.
El resultado de la medición indirecta de esta magnitud será $S_o \pm \Delta S$.
El valor medio del área de la mesa se obtiene como:

$$S_o = A_o . B_o$$

Y su incerteza

$$\Delta S = \left\{ \left[\frac{\partial S}{\partial A}(A_o, B_o) \cdot \Delta A \right]^2 + \left[\frac{\partial S}{\partial B}(A_o, B_o) \cdot \Delta B \right]^2 \right\}^{1/2} = \left\{ [B_o \cdot \Delta A]^2 + [A_o \cdot \Delta B]^2 \right\}^{1/2}$$

donde $\frac{\partial S}{\partial A}(A_o, B_o) = B_o$ y $\frac{\partial S}{\partial A}(A_o, B_o) = A_o$.

b) ¿ y si se quiere medir el perímetro $P_o \pm \Delta P$ de la misma mesa?

En este caso se puede usar que $P = 2 \cdot A + 2 \cdot B$

Entonces $P_o = 2 \cdot A_o + 2 \cdot B_o$

$$\Delta P = \left\{ \left[\frac{\partial P}{\partial A}(A_o, B_o) \cdot \Delta A \right]^2 + \left[\frac{\partial P}{\partial B}(A_o, B_o) \cdot \Delta B \right]^2 \right\}^{1/2} = \left\{ [2 \cdot \Delta A]^2 + [2 \cdot \Delta B]^2 \right\}^{1/2}$$

ya que $\frac{\partial P}{\partial A}(A_o, B_o) = \frac{\partial P}{\partial B}(A_o, B_o) = 2$

c) Para pensar (¡sirve para hacer la práctica!): ¿y si quisiéramos obtener el volúmen $V_o \pm \Delta V$ de un cuerpo esférico a partir de la medición de su diámetro $D_o \pm \Delta D$, usando $V = \frac{4}{3}\pi \cdot D^3$? ¿Qué valor le asignarían a π? ¿ π tiene incerteza? ¿Por qué?

d) Para pensar (un poco más…): si medimos N veces una misma magnitud, siempre con la misma incerteza, es decir, obtenemos como resultado los rangos: $x_1 \pm \Delta x$, $x_2 \pm \Delta x$,…, $x_N \pm \Delta x$, y queremos obtener el promedio de las mediciones: $\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right) / N$. ¿ Cuál será la incerteza de $\bar{x}$?